최상위권을 위한 심화 학습서

수학의 신

중등수학

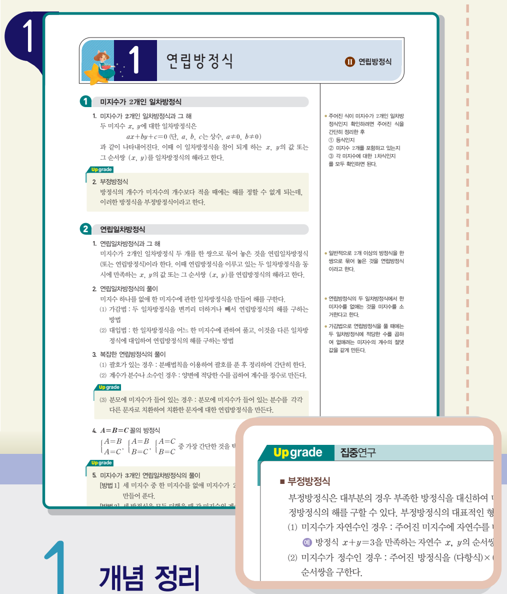
2·1

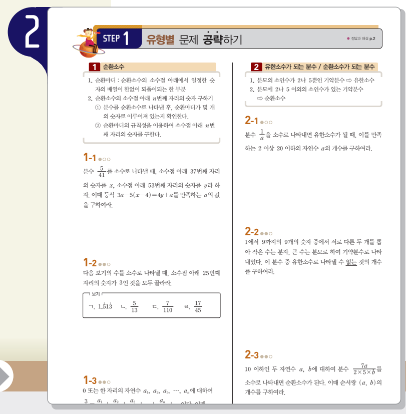
이 책의 **구성과 특징**

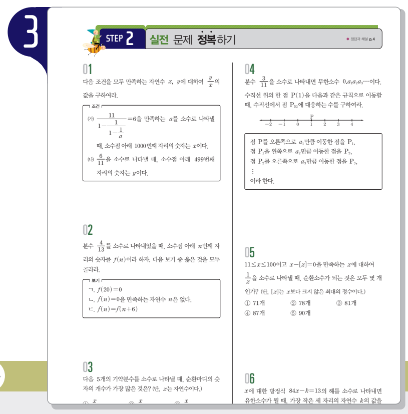
Structure

Upgrade 집중연구

중학교 교육과정 이외의 내용 또는 상위 개념인 **Upgrade** 의 내용을 보다 쉽게 이해할 수 있도록 자세한 부가 설명을 하였습니다. 아직 배우지 않은 개념이지만 집중연구의 내용을 통해 보다 수준 높은 수학의 개념을 익혀보세요.







1 개념 정리

중단원에서 반드시 알아야 할 핵심 개념만을 모아 한눈에 볼 수 있게 간략하게 구성하였습니다. 또한, 해당 개념과 연계되는 상위 개념을 **Upgrade** 를 통하여 소개하였습니다. 한층 업그레이드된 개념 정리를 만나보세요.

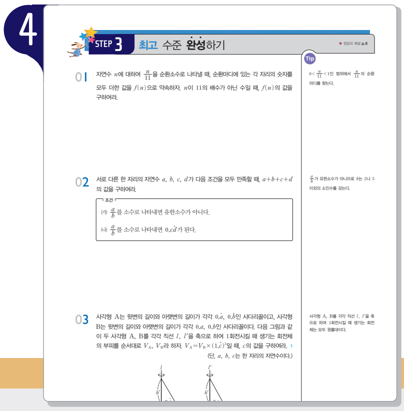
2 STEP1 | 유형별 문제 공략하기

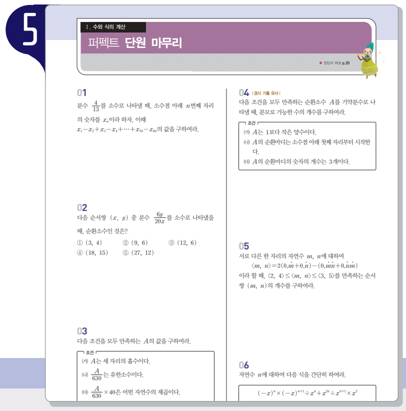
각 중단원의 유형별 핵심 개념과 문제를 체계적으로 구성하였습니다. 학교 시험에 자주 출제되는 문제부터 까다로운 문제까지 다양한 난이도로 구성되어 있어서 유형별로 완벽한 학습이 가능합니다.

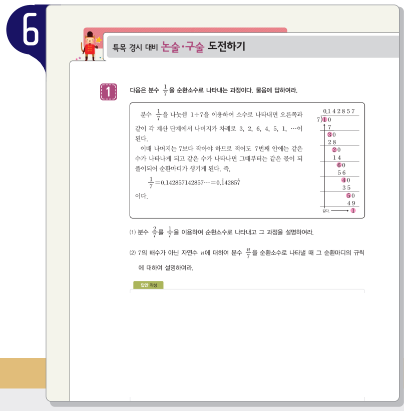
3 STEP2 | 실전 문제 정복하기

학교 시험에 출제되는 가장 까다로운 문제부터 특목고 입시와 경시대회를 대비한 고난도 문제까지 다양하게 구성하였습니다. 다양한 심화 문제를 통해 고난도 수학에 대한 실전 감각을 기르세요.

Master solution of mathmatics







4 STEP3 | 최고 수준 완성하기

중학교 수학에서 경험할 수 있는 최고 수준의 문제로 구성하였습니다. 특목고 입시, 경시대회를 준비한다면 반드시 풀어 봐야 할 문제들이므로 자신있게 도전하여 진정한 '수학의 신'이 되어 보세요.

5 퍼펙트 단원 마무리

단순한 단원 마무리 문제가 아니라 단원을 완벽하게 마무리 할 수 있는 고난도 문제로 구성하였습니다. STEP1, STEP2, STEP3를 차례로 풀어 왔다면 이제 퍼펙트 단원 마무리를 통해 깔끔하게 정리하세요.

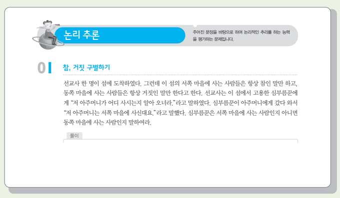
6 특목 경시 대비 논술·구술 도전하기

자사고, 과학고 등의 입시와 경시대회를 대비한 논술 · 구술 문제로 구성하였습니다. 출제 의도와 답안 작성 방법을 자세하게 설명하고 있어서 논술 · 구술에 대한 감각을 키울 수 있습니다. 자신만의 모범 답안을 작성해보세요.

나만의 수학 블로그

나만의 수학 블로그는 수학에 흥미를 가질 수 있도록 수준 높은 수학적 지식과 관련된 내용으로 구성하였습니다. 수학의 영역이 얼마나 다양하고 재미있는지 확인해 보세요.

특별부록 | 창의력 향상 문제



특목고 입시와 경시대회 등에서 가장 자주 출제되는 창의력 문제를 주제별로 분류하여 구성하였습니다. 수학적 사고에 바탕이 되는 다양한 문제를 통해 창의력을 길러 보세요.

이 책의 **차례**

Contents

III 부등식

IV 일차함수

'수학의 신' 은 고난도 중학교 수학 교재입니다. 이 책은 학교 시험에 출제될 수 있는 난이도 중상 정도의 문제부터 특목고 입시 및 경시대회 수준의 문제까지 다양한 난이도의 문제들로 구성되어 있습니다.

'수학의 신' 은 특정 과학고나 자사고 또는 특정 경시대회만을 대비하기 위한 교재가 아닙니다.
해당 학년에서 반드시 알아야 하는 핵심 개념 및 이와 연계된 상위 개념을 익힘으로써 중학교 수학 전반에 대한 지식을 쌓고, 다양한 난이도와 유형의 문제를 풀어 봄으로써 보다 높은 수준의 문제 해결 능력을 키우는 것에 그 목적을 두고 있습니다. 흔히 '신(神)' 이라 함은 전지전능하여 모든 것을 알고 통제할 수 있는 존재를 뜻합니다. '수학의 신' 은 단순히 좋은 고등학교로의 진학만을 목적으로 하는 것이 아닌, 자신만의 진정한 수학 실력을 기를 수 있는 교재입니다.
여러분 모두가 중학교 수학의 신(神)이 될 수 있기를 기원합니다.

I

수와 식의 계산

1 유리수와 순환소수

I 수와 식의 계산

1 유리수와 소수

1. 유리수

a, b가 정수이고, $b \neq 0$일 때 분수 $\frac{a}{b}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수

- 유리수
  - 정수
    - 양의 정수
    - 0
    - 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수

2. 소수의 분류

(1) 유한소수 : 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수

(2) 무한소수 : 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 무한히 많은 소수

3. 순환소수

무한소수 중에서 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 소수

(1) 순환마디 : 순환소수의 소수점 아래에서 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 한 부분

(2) 순환소수의 표현 : 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 나타낸다.

예 $0.333\cdots = 0.\dot{3}$, $0.235235235\cdots = 0.\dot{2}3\dot{5}$

$0.1479479479\cdots = 0.1\dot{4}7\dot{9}$

- $0.1010010001\cdots$과 같이 순환하지 않는 무한소수도 있다.

4. 유한소수가 되는 분수 / 순환소수가 되는 분수

(1) 분모의 소인수가 2나 5뿐인 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

예 $\frac{3}{5} = 0.6$, $\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \times 5} = 0.05$

(2) 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있는 기약분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

예 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$, $\frac{5}{66} = \frac{5}{2 \times 3 \times 11} = 0.0757575\cdots = 0.0\dot{7}\dot{5}$

- 모든 분수는 소수로 나타낼 수 있고, 유한소수가 되거나 순환소수가 된다.

2 순환소수의 분수 표현

1. 순환소수를 분수로 나타내는 방법

[방법 1] ① 주어진 순환소수를 x로 놓는다.

② 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 소수 부분이 같은 두 식을 만든다.

③ 두 식을 변끼리 빼어 x의 값을 구한다.

[방법 2]

① 전체의 수

$0.\dot{a}b\dot{c} = \frac{abc}{999}$

순환마디의 숫자의 개수

② 전체의 수 / 순환하지 않는 부분의 수

$a.b\dot{c}\dot{d} = \frac{abcd - ab}{990}$

순환마디의 숫자의 개수

소수점 아래 순환하지 않는 숫자의 개수

2. 유리수와 소수의 관계

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 – 유리수가 아니다.

- 유한소수와 순환소수는 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

STEP 1 유형별 문제 공략하기

정답과 해설 p.2

1 순환소수

1. 순환마디 : 순환소수의 소수점 아래에서 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 한 부분
2. 순환소수의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자 구하기
   ① 분수를 순환소수로 나타낸 후, 순환마디가 몇 개의 숫자로 이루어져 있는지 확인한다.
   ② 순환마디의 규칙성을 이용하여 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 구한다.

1-1

분수 $\frac{5}{41}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 37번째 자리의 숫자를 x, 소수점 아래 53번째 자리의 숫자를 y라 하자. 이때 등식 $3a-5(x-4)=4y+a$를 만족하는 a의 값을 구하여라.

1-2

다음 보기의 수를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 25번째 자리의 숫자가 3인 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $1.\dot{5}1\dot{3}$　ㄴ. $\frac{5}{13}$　ㄷ. $\frac{7}{110}$　ㄹ. $\frac{17}{45}$

1-3

0 또는 한 자리의 자연수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n에 대하여

$\frac{3}{7}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots$이다. 이때

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수)

2 유한소수가 되는 분수 / 순환소수가 되는 분수

1. 분모의 소인수가 2나 5뿐인 기약분수 ⇨ 유한소수
2. 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있는 기약분수
   ⇨ 순환소수

2-1

분수 $\frac{1}{a}$을 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, 이를 만족하는 2 이상 20 이하의 자연수 a의 개수를 구하여라.

2-2

1에서 9까지의 9개의 숫자 중에서 서로 다른 두 개를 뽑아 작은 수는 분자, 큰 수는 분모로 하여 기약분수로 나타내었다. 이 분수 중 유한소수로 나타낼 수 없는 것의 개수를 구하여라.

2-3

10 이하인 두 자연수 a, b에 대하여 분수 $\frac{7a}{2\times5\times b}$를 소수로 나타내면 순환소수가 된다. 이때 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

3 유한소수가 되도록 하는 미지수의 값 구하기

유리수 $\frac{A}{B}(B\neq0)$에 대하여 $\frac{A}{B}\times x$가 유한소수로 나타내어지도록 하는 x의 값 구하기

① 주어진 분수 $\frac{A}{B}$를 기약분수로 고친다.

② 분모를 소인수분해한다.

③ 분모의 소인수 중에서 2나 5가 아닌 수를 모두 약분하여 없앨 수 있는 수를 찾는다.

3-1 ●○○

두 수 $\frac{90}{108}$, $\frac{9}{110}$에 자연수 a를 곱하여 소수로 나타내었더니 둘 다 유한소수가 되었다. 이때 a가 될 수 있는 두 자리의 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

3-2 ●●○

$\frac{x}{56}$를 기약분수로 나타내면 $\frac{3}{y}$이고 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때 $x+y$의 값을 모두 구하여라.

(단, x는 50 이하인 자연수)

3-3 ●●○

분수 $\frac{63}{200N}$을 소수로 나타낼 때, 유한소수가 되도록 하는 두 자리의 홀수 N의 개수를 구하여라.

4 순환소수를 분수로 나타내기

순환소수 $x=2.1\dot{4}\dot{5}$를 분수로 나타내면

[방법 1]

$$\begin{array}{rrl} & 1000x= & 2145.45\cdots \\ -) & 10x= & 21.45\cdots \\ \hline & 990x= & 2124 \end{array}$$

$$\therefore\ x=\frac{2124}{990}=\frac{118}{55}$$

[방법 2] $x=2.1\dot{4}\dot{5}=\frac{2145-21}{990}=\frac{2124}{990}=\frac{118}{55}$

4-1 ●○○

어떤 기약분수를 순환소수로 나타내는데 지헌이는 분모를 잘못 보아 $0.58\dot{3}$으로 나타내고, 현준이는 분자를 잘못 보아 $0.\dot{8}\dot{1}$로 나타내었다. 이때 처음의 분수를 순환소수로 나타내어라.

4-2 ●●○

다음 식을 만족하는 순환소수 x의 값이 $0.\dot{a}b\dot{c}$일 때, 순환마디를 이루는 한 자리의 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

$$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=0.\dot{1}3\dot{5}$$

4-3 ●●○

$\frac{x}{396}$를 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되는 순환소수가 된다. 이를 만족하는 200 이하의 자연수 x의 개수를 구하여라.

4-4

어떤 순환소수 A를 분수로 나타내면 분모가 495인 기약분수가 된다. 다음 보기 중 순환소수 A에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

> **보기**
> ㄱ. 순환마디의 숫자의 개수는 1개이다.
> ㄴ. 순환마디는 소수점 아래 2번째 자리부터 시작된다.
> ㄷ. A를 분수로 나타내는 데 필요한 식은 $100A-10A$이다.

4-5

서로소인 두 자연수 m, n이 다음 등식을 만족할 때, $n-m$의 값을 구하여라.

$$2+369\times\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)=\frac{n}{m}$$

5 순환소수의 대소 관계

(1) 순환소수를 분수로 나타낸 후 대소를 비교한다.
(2) 순환마디가 여러 번 나열되도록 순환소수를 풀어 쓴 후 각 자리의 숫자를 차례로 비교한다.

예 $0.\dot{1}\dot{3}=0.131313\cdots$
$0.1\dot{3}=0.133333\cdots$ ⇨ $0.\dot{1}\dot{3}<0.1\dot{3}$

5-1

다음 중 대소 관계가 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $0.\dot{1}\dot{2}<0.12$
② $\frac{20}{33}>0.\dot{6}$
③ $0.\dot{3}>\frac{3}{10}$
④ $0.\dot{0}2\dot{5}>0.0\dot{2}\dot{5}$
⑤ $2.\dot{6}=\frac{8}{3}$

5-2

다음 중 $0.4\dot{1}$과 $0.\dot{8}$ 사이에 있는 수를 모두 고르면?

(정답 2개)

① $\frac{13}{45}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{47}{99}$
④ $\frac{59}{90}$
⑤ $\frac{89}{99}$

6 순환소수의 연산

순환소수를 분수로 고친 후 계산한다.

예 $0.\dot{5}+0.\dot{3}=\frac{5}{9}+\frac{3}{9}=\frac{8}{9}=0.\dot{8}$

$0.\dot{3}\dot{6}\div0.\dot{4}=\frac{36}{99}\div\frac{4}{9}=\frac{36}{99}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{11}=\frac{81}{99}=0.\dot{8}\dot{1}$

6-1

$0.\dot{2}\dot{3}+A$를 기약분수로 나타내면 $\frac{7}{11}$일 때, A를 순환소수로 나타내면?

① $0.\dot{4}\dot{0}$
② $0.\dot{4}0\dot{4}$
③ $0.40\dot{4}$
④ $0.4\dot{4}\dot{0}$
⑤ $0.\dot{4}$

6-2

자연수 n에 대하여 $2.4\dot{8}\times A=n^2$을 만족하는 가장 작은 자연수 A와 그때의 n의 값을 각각 구하여라.

6-3

$(1.\dot{3})^2 \times \frac{a}{b} = 3.0\dot{2}$를 만족하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 서로소이다.)

6-4

한 자리의 자연수 a, b에 대하여 $a-2b=0$이고 $0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{0}\dot{9}$일 때, $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값을 순환소수로 나타내어라.

7 순환소수가 포함된 방정식 또는 부등식

순환소수를 분수로 고쳐서 방정식 또는 부등식을 푼다.

7-1

$0.\dot{2}x+\frac{1}{3}=1.\dot{6}$이고 $0.0\dot{4}y-\frac{4}{15}=0.\dot{6}$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.

7-2

$0.4\dot{x}=\frac{x+1}{15}$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 값을 구하여라.

7-3

다음 중 부등식 $\frac{1}{6}<0.\dot{a}-0.0\dot{a}<\frac{1}{3}$을 만족하는 한 자리의 자연수 a의 값을 모두 고르면? (정답 2개)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8 유리수와 소수의 관계

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수

8-1

다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. 유한소수는 유리수이다.
ㄴ. 무한소수는 유리수이다.
ㄷ. 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
ㄹ. 무한소수 중에는 순환소수가 아닌 것도 있다.
ㅁ. 모든 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.
ㅂ. 순환하지 않는 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.

8-2

a는 유한소수로 나타낼 수 있는 분수이고, b는 유한소수로 나타낼 수 없는 분수일 때, 다음 보기 중 항상 유한소수로 나타낼 수 없는 분수인 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $a+b$ ㄴ. $a-b$
ㄷ. $a\times b$ ㄹ. $a\div b$

정답과 해설 p.4

01

다음 조건을 모두 만족하는 자연수 x, y에 대하여 $\frac{y}{x}$의 값을 구하여라.

> **조건**
>
> (가) $\dfrac{11}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}=6$을 만족하는 a를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 1000번째 자리의 숫자는 x이다.
>
> (나) $\frac{6}{11}$을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 499번째 자리의 숫자는 y이다.

02

분수 $\frac{4}{13}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 $f(n)$이라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

> **보기**
>
> ㄱ. $f(20)=0$
>
> ㄴ. $f(n)=0$을 만족하는 자연수 n은 없다.
>
> ㄷ. $f(n)=f(n+6)$

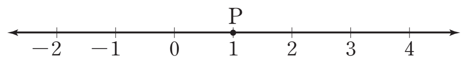
03

다음 5개의 기약분수를 소수로 나타낼 때, 순환마디의 숫자의 개수가 가장 많은 것은? (단, x는 자연수이다.)

① $\frac{x}{3}$ ② $\frac{x}{6}$ ③ $\frac{x}{9}$
④ $\frac{x}{11}$ ⑤ $\frac{x}{15}$

04

분수 $\frac{3}{11}$을 소수로 나타내면 무한소수 $0.a_1a_2a_3\cdots$이다. 수직선 위의 한 점 P(1)을 다음과 같은 규칙으로 이동할 때, 수직선에서 점 P_{52}에 대응하는 수를 구하여라.



> 점 P를 오른쪽으로 a_1만큼 이동한 점을 P_1,
> 점 P_1을 왼쪽으로 a_2만큼 이동한 점을 P_2,
> 점 P_2를 오른쪽으로 a_3만큼 이동한 점을 P_3,
> ⋮
> 이라 한다.

05

$11\le x\le 100$이고 $x-[x]=0$을 만족하는 x에 대하여 $\frac{1}{x}$을 소수로 나타낼 때, 순환소수가 되는 것은 모두 몇 개인가? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 71개 ② 78개 ③ 81개
④ 87개 ⑤ 90개

06

x에 대한 방정식 $84x-k=13$의 해를 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, 가장 작은 세 자리의 자연수 k의 값을 구하여라.

07

분수 $\frac{15}{x}$가 다음 조건을 모두 만족할 때, 자연수 x의 값을 모두 구하여라.

> **조건**
> (가) 기약분수이다.
> (나) $\frac{1}{3}<\frac{15}{x}<1$
> (다) 소수로 나타내면 유한소수가 된다.

08

자연수 n에 대하여 29^n을 10으로 나눈 나머지를 a_n이라 하자. 이때 $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots$의 값을 기약분수로 나타내어라.

09

$0.ab\dot{c}\dot{d}=\frac{1237}{9900}$일 때, 한 자리의 자연수 a, b, c, d의 값을 각각 구하여라.

10

두 자연수 a, b에 대하여 순환소수 $0.3\dot{1}\dot{a}$를 분수로 나타내면 $\frac{b}{330}$이다. 이때 $b-a$의 값을 모두 구하여라.

(단, $1\le a\le 9$)

11

$a=0.4\dot{2}\dot{7}$, $b=999.\dot{9}$, $c=9.\dot{9}$에 대하여 $a(b-c)$는 몇 자리의 자연수인지 구하여라.

12

두 수 x, y에 대하여 연산 ◎을 다음과 같이 약속하자.

$$x◎y=\begin{cases} x\ (x>y) \\ 0\ (x=y) \\ y\ (x<y) \end{cases}$$

$a=0.6\dot{9}$, $b=0.7$, $c=0.\dot{5}\dot{3}$, $d=\frac{53}{90}$, $e=0.\dot{9}$일 때, $\{(a◎b)◎(c◎d)\}◎e$의 값을 구하여라.

13

한 자리의 자연수 a, b가 다음 조건을 모두 만족한다. 이때 순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구하여라.

> **조건**
> (가) $0.\dot{3}<0.\dot{a}<0.\dot{4}\dot{5}$
> (나) $\dfrac{4}{9}<0.\dot{a}\dot{b}<\dfrac{16}{33}$

14

한 자리의 자연수 x, y에 대하여

$$\langle x,\ y\rangle=0.\dot{x}+0.0\dot{y},\ [x,\ y]=0.\dot{x}+0.00\dot{y}$$

라 할 때, $\langle 1,\ 2\rangle+[2,\ 4]=162\times A$를 만족하는 A를 순환소수로 나타내어라.

15

어떤 수에 $1.\dot{8}$을 곱해야 할 것을 잘못 보고 $1.1\dot{8}$을 곱하였더니 바르게 계산한 결과보다 $1.3\dot{9}$만큼 작게 나왔다. 이때 바르게 계산한 결과를 순환소수로 나타내어라.

16

한 자리의 자연수 a, b에 대하여 $0.\dot{a}\dot{b}\times\dfrac{8}{3}=0.\dot{b}\dot{a}$일 때, $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값은?

① $0.\dot{1}\dot{2}$　② $0.\dot{2}\dot{7}$　③ $0.\dot{4}\dot{3}$
④ $0.\dot{7}\dot{9}$　⑤ 1

17

x km 거리의 두 계곡을 왕복으로 운행하는 두 종류의 케이블카 A, B가 있다. A 케이블카는 갈 때와 올 때의 속력이 각각 시속 $0.\dot{a}$ km, 시속 $0.\dot{b}$ km이고 B 케이블카는 갈 때와 올 때의 속력이 각각 시속 $0.a$ km, 시속 $0.b$ km이다. 이때 B 케이블카로 계곡을 왕복하는 데 걸리는 시간은 A 케이블카로 계곡을 왕복하는 데 걸리는 시간의 몇 배인지 구하여라. (단, a, b는 한 자리의 자연수이다.)

18

$1<a<b<c<9$인 세 자연수 a, b, c에 대하여 $(0.0\dot{b})^2=0.\dot{a}\times 0.00\dot{c}$가 성립할 때, b의 값을 구하여라.

정답과 해설 p.6

01 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{11}$을 순환소수로 나타낼 때, 순환마디에 있는 각 자리의 숫자를 모두 더한 값을 $f(n)$으로 약속하자. n이 11의 배수가 아닌 수일 때, $f(n)$의 값을 구하여라.

Tip
$0<\frac{n}{11}<1$인 범위에서 $\frac{n}{11}$의 순환마디를 찾는다.

02 서로 다른 한 자리의 자연수 a, b, c, d가 다음 조건을 모두 만족할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

조건

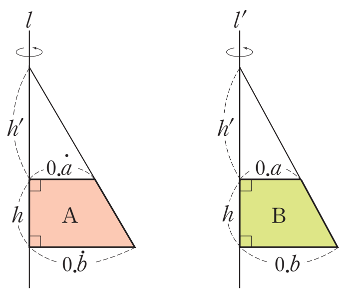
(가) $\frac{a}{b}$를 소수로 나타내면 유한소수가 아니다.

(나) $\frac{a}{b}$를 소수로 나타내면 $0.c\dot{d}$가 된다.

Tip
$\frac{a}{b}$가 유한소수가 아니므로 b는 2나 5 이외의 소인수를 갖는다.

03 사각형 A는 윗변의 길이와 아랫변의 길이가 각각 $0.\dot{a}$, $0.\dot{b}$인 사다리꼴이고, 사각형 B는 윗변의 길이와 아랫변의 길이가 각각 $0.a$, $0.b$인 사다리꼴이다. 다음 그림과 같이 두 사각형 A, B를 각각 직선 l, l'을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 순서대로 V_{A}, V_{B}라 하자. $V_{\mathrm{A}}=V_{\mathrm{B}}\times(1.\dot{c})^2$일 때, c의 값을 구하여라.

(단, a, b, c는 한 자리의 자연수이다.)



Tip
사각형 A, B를 각각 직선 l, l'을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 모두 원뿔대이다.

04 서로 다른 한 자리의 자연수 a, b, c, d에 대하여 두 순환소수 $0.\dot{a}bc\dot{d}$와 $0.\dot{c}da\dot{b}$의 합이 자연수이다. 이때 $a-b+c-d$의 값을 구하여라.

Tip 1보다 작은 두 순환소수의 합이 어떤 자연수가 되는지 생각해 본다.

05 양의 정수 m, n에 대하여 $\dfrac{n}{m}=0.\dot{a}\dot{b}$, $\dfrac{m}{n}=3.\dot{c}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 한 자리의 자연수이다.)

Tip $\dfrac{m}{n}$은 $\dfrac{n}{m}$의 역수이다.

06 정수 k에 대하여 $k\le x<k+1$일 때 $[x]=k$, $k-1<x\le k$일 때 $\langle x\rangle=k$라 하자. x에 대한 일차방정식 $\langle a\rangle x-[b]=2.\dot{9}x-3.\dot{9}$의 해가 무수히 많도록 하는 a, b에 대하여 $a+b$의 범위를 구하면 $m<a+b<n$이다. 이때 m, n의 값을 각각 구하여라.

Tip x에 대한 일차방정식 $ax=b$의 해가 무수히 많으려면 $a=0$, $b=0$이어야 한다.

07 $\dfrac{n}{36}=0.a9\dot{4}$를 만족하는 자연수 n과 한 자리의 자연수 a에 대하여 $a+n$의 값을 모두 구하여라.

Tip $0.ab\dot{c}=\dfrac{(100a+10b+c)-(10a+b)}{900}$

2 단항식의 계산

1 지수법칙

$a \neq 0$일 때, 자연수 m, n에 대하여

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m b^m$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b \neq 0$)

Up grade

지수법칙의 확장

(5) $a \neq 0$일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, n은 자연수)

(6) m, n이 정수일 때도 지수법칙이 모두 성립한다.

- $a^1 = a$
- $(a^m b^n)^l = a^{ml} b^{nl}$, $\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^l = \dfrac{a^{ml}}{b^{nl}}$ (단, $b \neq 0$, l은 자연수)

2 단항식의 곱셈과 나눗셈

1. (단항식)$\times$(단항식)의 계산

(1) 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱하여 계산한다.

(2) 같은 문자끼리의 곱셈은 지수법칙을 이용한다.

2. (단항식)$\div$(단항식)의 계산

분수 꼴로 고친 후 약분하거나 나누는 식의 역수를 곱하여 계산한다.
이때 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

3. 단항식의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산

(1) 괄호가 있는 식은 지수법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

(2) 나눗셈은 나누는 식의 역수의 곱셈으로 바꾼다.

(3) 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

- 곱셈과 나눗셈에서 음의 부호($-$)의 개수가
  - 홀수 개이면 부호는 ⇨ $-$
  - 짝수 개이면 부호는 ⇨ $+$
- $A \times B \div C = A \times B \times \dfrac{1}{C} = \dfrac{AB}{C}$

  $A \div B \times C = A \times \dfrac{1}{B} \times C = \dfrac{AC}{B}$

  $A \div B \div C = A \times \dfrac{1}{B} \times \dfrac{1}{C} = \dfrac{A}{BC}$

Upgrade 집중연구

■ 지수법칙의 확장

(5) $a \neq 0$일 때, 자연수 n에 대하여

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1, \quad a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

(6) 지수가 정수일 때도 지수법칙이 모두 성립한다. (단, $a \neq 0$)

① $a^{-2} \times a^{-3} = a^{(-2)+(-3)} = a^{-5}$

② $a^{-2} \div a^{-3} = a^{(-2)-(-3)} = a$

③ $(a^{-2})^{-3} = a^{(-2)\times(-3)} = a^6$

④ $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}$ (단, $b \neq 0$)

STEP 1 유형별 문제 공략하기

정답과 해설 p.8

1 지수법칙

$a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때

$a^m\times a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq0$)

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$$

1-1

다음을 만족하는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하여라.

$$a\times a^2\times a^3\times\cdots\times a^{10}=a^m,\quad [\{(a^2)^3\}^4]^5=a^n$$

1-2

20^{20}은 50^{10}의 A배이고, 6^{30}은 18^{15}의 B배이다. $AB=2^n$일 때, n의 값을 구하여라.

1-3

다음 식이 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하여라.

$$\frac{1\times2\times3\times\cdots\times14\times15}{n}$$

1-4

a, b, c가 자연수일 때, $(x^ay^bz^c)^k=x^{30}y^{24}z^{36}$을 만족하는 가장 큰 자연수 k의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

1-5

$\left(\frac{16^6+4^9}{16^5+4^7}\right)^2$의 값을 2의 거듭제곱으로 나타내어라.

Upgrade

2 지수법칙의 확장

(1) $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (단, $a\neq0$, n은 자연수)

(2) 지수가 정수일 때도 지수법칙이 모두 성립한다.

2-1

$a=3^{x-1}$일 때, 9^x을 a를 사용하여 나타내면?

① $3a$ ② $6a$ ③ $9a$
④ a^2 ⑤ $9a^2$

2-2

0이 아닌 유리수 a와 자연수 n에 대하여 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$라 할 때, 다음 중 가장 작은 수는?

① $(-1)^{-4}$ ② $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
③ $4^{-3}\times\frac{1}{16^{-2}}$ ④ $0.5^3\times2^{-2}$
⑤ $\left(\frac{1}{10}\right)^0\div2^{-4}$

2-3

자연수 m, n에 대하여 $\frac{a^{-m}+a^{-n}}{a^m+a^n}$을 간단히 하면? (단, $a\neq0$)

① a^{m+n} ② a^{m-n} ③ a^{-m-n}
④ a^{mn} ⑤ $a^{\frac{n}{m}}$

3 지수에 미지수가 있는 방정식

지수에 미지수가 있는 방정식은 양변의 식을 밑이 같아지도록 변형한 후 지수끼리 비교한다.
즉, $a^{f(x)}=a^{g(x)}\ (a\neq1)$의 꼴로 정리한 다음 $f(x)=g(x)$에서 x의 값을 구한다.

3-1

$8^x\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$일 때, x의 값을 구하여라.

3-2

$4^x+4^x+4^x+4^x=2^8$을 만족하는 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3-3

$0.125^x=512$일 때, x의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 3 ⑤ 4

3-4

$a^{-3}=2$이고 $\frac{a^{-2}}{a^2}=2a^x$일 때, x의 값을 구하여라.

3-5

다음 식을 만족하는 x의 값을 구하여라.

$$5^{x-1}+5^x+5^{x+1}=155$$

4 자연수의 거듭제곱 사이의 대소 비교

(1) 밑이 같으면 지수가 큰 수가 더 크다.
예 $2^{10}>2^9$
(2) 지수가 같으면 밑이 큰 수가 더 크다.
예 $3^{10}>2^{10}$

4-1

다음 네 수를 크기가 작은 수부터 크기순으로 나열하여라.

$$1^{400},\ 2^{300},\ 3^{200},\ 4^{100}$$

4-2

한 가닥인 반죽을 접어 늘여서 국수를 만드는데 지민이는 반씩 15번을 접어서 만들고, 현수는 삼등분씩 10번을 접어서 만들었다. 이때 지민이와 현수 중 누가 만든 국수의 가닥이 더 많은지 구하여라.

4-3

$16^{1000}\le x^{2000}\le3^{3000}$을 만족하는 자연수 x의 값을 모두 구하여라.

5 지수법칙의 응용

1. 몇 자리의 자연수인지 구하기
   주어진 수를 소인수분해한 후, 밑이 2와 5인 소인수를 묶어서 $a\times10^n$ (a, n은 자연수)의 꼴로 변형한다.
   예 $512\times125=2^9\times5^3=2^6\times(2^3\times5^3)=2^6\times(2\times5)^3$
   $=2^6\times10^3=64\times10^3$
   따라서 512×125는 5자리의 자연수이다.
2. 거듭제곱의 일의 자리의 숫자 구하기
   2^n, 3^n, 4^n, $\cdots$ 등의 일의 자리의 숫자는 규칙적으로 반복되므로 규칙성을 찾는다.

5-1

$2^{15}\times3^4\times5^{14}$은 몇 자리의 자연수인지 구하여라.

5-2

자연수 n에 대하여 $f(n)$을
$f(n)=$(7^n을 10으로 나눈 나머지)라 할 때,
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$의 값을 구하여라.

5-3

83^{83}의 일의 자리의 숫자는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

5-4

$\dfrac{2^{20}\times15^{40}}{45^{20}}$은 n자리의 자연수이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

6 단항식의 곱셈과 나눗셈

① 지수법칙을 이용하여 괄호를 푼다.
② 나눗셈은 나누는 식의 역수의 곱셈으로 바꾼다.
③ 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

6-1

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(x^2y)^2\div\{-(x^5y^3)^3\}\times(-x^3y)^4$

(2) $(-2a^3b)\times(3ab)^2\div\dfrac{3}{2}(-ab^2)^2$

6-2

다음 $\square$ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

(1) $\left(-\dfrac{3}{5}a^3b\right)\times(-2ab^3)\times\square=12a^5b^2$

(2) $18a^4b^2\div\square\div\left(-\dfrac{3a}{2b^2}\right)^3=-3a^2b^3$

6-3

$(2x^{n+1})^4\div\left(-\dfrac{8}{3}x^{2n+1}\right)^2$을 간단히 하면? (단, n은 자연수)

① $\dfrac{4}{9}x$ ② $\dfrac{9}{4}x$ ③ $\dfrac{4}{9}x^2$
④ x^2 ⑤ $\dfrac{9}{4}x^2$

6-4

$x=3$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=0.2$일 때,
$2x^3y^3z\times(-3x^2y^2z^2)\div\{(-x)^3(-y^2z)\}$의 값을 구하여라.

6-5

다음을 만족하는 단항식 A, B에 대하여 $\frac{A}{B}$를 간단히 하여라.

$$\frac{18}{5}a^4b^8 \div A = -6a^2b^5$$

$$A \times B \div \frac{3}{10}a^3b = a^7b^4$$

6-6

$\left(\frac{3x}{y^2}\right)^a \div \left(-\frac{y^3}{x}\right)^b \times \left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)^2 = -\frac{x^9}{y^7}$일 때, 자연수 a, b의 값을 각각 구하여라.

7 단항식의 곱셈과 나눗셈의 응용

문제에서 주어진 조건에 맞게 식을 세운 후 문제가 요구하는 답을 구한다.

참고 (원기둥의 부피)

$=\pi \times$(밑면의 반지름의 길이)$^2 \times$(높이)

(구의 부피)$=\frac{4}{3}\times\pi\times$(반지름의 길이)^3

7-1

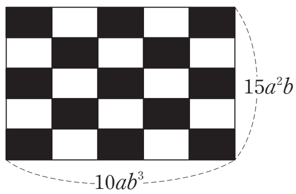
밑면의 반지름의 길이가 $3xy^2$인 원기둥 모양의 물통에 높이의 $\frac{2}{3}$만큼 물을 채웠더니 부피가 $36\pi x^4y^3$이 되었다. 이때 이 물통의 높이를 구하여라.

7-2

밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $4r$인 원기둥 모양의 통에 음료수가 가득 차 있다. 이 음료수를 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$인 반구 모양의 컵에 가득 담아 사람들에게 나누어 주려고 할 때, 최대 몇 명의 사람들에게 음료수를 나누어 줄 수 있는지 구하여라. (단, 통과 컵의 두께는 무시한다.)

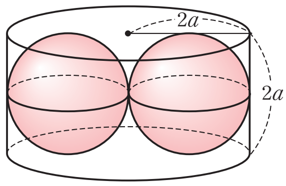
7-3

다음 그림과 같이 서로 합동인 25개의 작은 직사각형으로 이루어진 큰 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $10ab^3$, $15a^2b$이다. 이때 검은 직사각형의 넓이의 합과 흰 직사각형의 넓이의 합을 순서대로 구하여라.



7-4

다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $2a$이고, 높이가 $2a$인 원기둥 안에 크기가 같은 2개의 구가 꼭 맞게 들어 있다. 이때 원기둥의 부피는 구 2개의 부피의 합의 몇 배인지 구하여라.



정답과 해설 p.10

01

1보다 큰 자연수 n에 대하여 $2^n=a$, $3^n=b$라 할 때, $3^{n-1}(2^n+2^{n+1})$을 a, b를 사용하여 나타내면?

① $a+b$ ② ab ③ $\frac{a}{b}$
④ a^2b ⑤ $3a+2b$

02

자연수 x에 대하여 $L(a^x)=x$라 하자. 자연수 m, n에 대하여 $X=a^m$, $Y=a^n$이라 할 때, 다음을 $L(X)$, $L(Y)$를 사용하여 나타내어라. (단, $a>0$, $m>n$)

(1) $L(XY)$
(2) $L\left(\frac{X}{Y}\right)$
(3) $L(X^n)$

03

자연수 a에 대하여 $S[2^a]=a$라 약속할 때, $S\left[\frac{512^4-8\times256^4}{256^3}\right]$의 값을 구하여라.

04

$2^n(5^{n+1}-5^n)$의 약수의 개수가 모두 99개일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

05

$\frac{3^7\times10^8\times12^3\times45^{11}}{6^{12}\times15^x}$이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 x의 값과 그때의 자연수를 순서대로 구하여라.

06

자연수 a, b에 대하여 $\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=5$일 때, $\frac{a-3b}{3a+5b}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

07

자연수 n에 대하여 $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$이라 할 때,

$\frac{x^2+x^4+x^6}{x^{-3}+x^{-5}+x^{-7}}=x^a$을 만족하는 a의 값을 구하여라.

(단, $x\neq0$, $x\neq1$)

08

$2^{x-1}=A$, $5^{1-x}=B$라 할 때, 다음 중 100^x과 같은 것은?

① $\left(\frac{A}{B}\right)^2$　② $\left(\frac{A}{10B}\right)^2$　③ $\left(\frac{B}{10A}\right)^2$

④ $\left(\frac{10A}{B}\right)^2$　⑤ $\left(\frac{10B}{A}\right)^2$

09

자연수 x, y에 대하여 $\frac{x^y y^x}{x^x y^y}=\left(\frac{y}{x}\right)^m$이 항상 성립할 때, m을 x, y를 사용하여 나타내면? (단, $x>y>1$)

① $x+y$　② $x-y$　③ xy

④ $\frac{y}{x}$　⑤ $\frac{x}{y}$

10

$3^{2x+4}\times9^{3-x}\times4^x=81\times6^{2x}$일 때, x의 값은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

11

$3^x(5^y-1)=10044$일 때, 자연수 x, y의 값을 각각 구하여라.

12

세 수 2^{35}, 5^{15}, 6^{14} 중에서 가장 큰 수를 L, 가장 작은 수를 S라 할 때, 순서쌍 (L, S)를 구하여라.

13

자연수 x에 대하여 x의 일의 자리의 숫자를 $\langle x \rangle$라 하자. 예를 들어 $\langle 2 \rangle=2$, $\langle 20 \rangle=0$, $\langle 19\times 89 \rangle=1$이다. 이때 $\langle\langle 123^{45} \rangle+\langle 8^{88}+8^{99} \rangle\rangle$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 8　⑤ 9

14

$a=4^3$, $b=27^2$이고, $ab^3\times(a^4b^3)^2\div\{(ab)^2\}^4=2^n\times3^n$일 때, 자연수 n의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

15

$ax^3y^2\div\left(-\frac{4}{5}x^4y^b\right)^2\times8x^2y^2=\frac{15}{2x^3y^2}$를 만족하는 두 수 a, b에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{10a^3}{b^2}\times\left(-\frac{2}{5}a^2b^2\right)\div\frac{a^3b}{2}$$

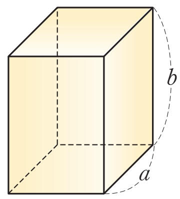
16

다음은 어떤 일정한 규칙으로 항을 나열한 것이다. 이때 A, B에 알맞은 식을 구하여라. (단, $ab\neq0$)

$\boxed{A}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $2a$, b, $2ab$, $2ab^2$, $4a^2b^3$, $\boxed{B}$

17

오른쪽 그림은 밑면이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 b인 사각기둥이다. 이 사각기둥에서 밑면의 각 변의 길이를 $10\,\%$씩 늘이고, 높이를 $10\,\%$ 줄여서 새로운 사각기둥을 만들었다. 새로 만든 사각기둥의 부피는 처음 사각기둥의 부피에 비하여 몇 $\%$ 증가 또는 감소하는지 구하여라.



18

오른쪽 그림과 같이 직사각형을 각 변에 평행하게 잘라 4개의 직사각형으로 만들었더니 넓이가 각각 x^x, $x^x\times y^x$, $x^y\times y^y$, $x^y\times y^5$이 되었다. 이때 $x+y$의 값을 구하여라.

x^x	$x^x\times y^x$
$x^y\times y^y$	$x^y\times y^5$

(단, x, y는 2 이상의 자연수이다.)

● 정답과 해설 p.12

Tip

01 다음을 계산하여라.

$$\frac{10^9-10^8-10^7+10^6-10^5+10^4+10^3-10^2}{9\times 99\times 9999}$$

지수법칙과 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

02 자연수 n에 대하여 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a^0=1$이라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(단, $a\neq 0$)

$$\frac{5}{25^{-25}+1}+\frac{5}{25^{-24}+1}+\cdots+\frac{5}{25^{-1}+1}+\frac{5}{25^{0}+1}+\frac{5}{25^{1}+1}+\cdots+\frac{5}{25^{24}+1}+\frac{5}{25^{25}+1}$$

$\frac{1}{a^{-n}+1}+\frac{1}{a^n+1}$을 간단히 하여 규칙을 찾는다.

03 $4\times 5^{n-1}\times(2^{n-2}+2^{n-1})\times(3^n+3^{n+2})$을 간단히 하면 자연수 a, b에 대하여 $a\times b^n$의 꼴로 나타낼 수 있다. a가 최소가 될 때의 $a+b$의 값을 구하여라.

(단, n은 2보다 큰 자연수)

지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

04 $3^{777}+27^{259}+(3^{37})^n=3^{778}$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

좌변의 모든 항을 3의 거듭제곱으로 나타낸다.

Tip

05 어느 해의 5월 18일은 화요일일 때, 이 날로부터 10^{36}일 후는 무슨 요일인가?

① 월요일 ② 화요일 ③ 수요일
④ 목요일 ⑤ 토요일

두 자연수 a, b에 대하여 a를 b로 나눈 나머지를 r라 하면 a^n을 b로 나눈 나머지는 r^n을 b로 나눈 나머지와 같다. (단, n은 자연수)

06 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)=x-10\left[\frac{x}{10}\right]$라 하자. 이때 $f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\cdots+f(2^{2221})+f(2^{2222})$의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

함수 $f(x)$의 x에 적당한 수를 대입하여 $f(x)$가 무엇을 나타내는지 알아본다.

07 $F(x)=a^xb^{2x}$이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $ab\neq0$)

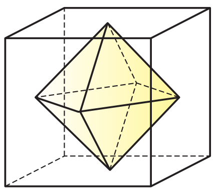
(1) $F(2x)$를 $F(x)$를 사용하여 나타내어라.

(2) 자연수 k에 대하여 $F(x)\times F(2x)\times F(3x)=F(kx)$일 때, k의 값을 구하여라.

(3) 두 자연수 p, q에 대하여 $F(2x+3)=F(p)\times\{F(x)\}^q$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.

$F(x)=a^xb^{2x}$의 x에 주어진 식을 대입하여 지수법칙을 이용한다.

08 오른쪽 그림과 같이 정육면체의 각 면의 대각선의 교점을 연결하여 정팔면체를 만들 수 있다. 이때 정육면체와 정팔면체의 부피의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.



정육면체의 한 모서리와 길이가 같은 선분을 정팔면체에서 찾아본다.

3 다항식의 계산

Ⅰ 수와 식의 계산

1 다항식의 계산

1. 다항식의 덧셈과 뺄셈 : 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

- $a+(b-c)=a+b-c$
  $a-(b-c)=a-b+c$

2. 이차식의 덧셈과 뺄셈

(1) 이차식 : 각 항의 차수 중에서 가장 큰 차수가 2인 다항식

(2) 이차식의 덧셈과 뺄셈 : 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

참고 삼차 이상의 다항식의 덧셈, 뺄셈도 이차식과 같은 방법으로 하면 된다.

- 괄호가 있는 식은 소괄호( ) → 중괄호{ } → 대괄호[ ]의 순으로 풀어서 계산한다.

3. (단항식)×(다항식)의 계산 : 분배법칙을 이용하여 다항식의 각 항에 단항식을 곱하여 계산한다.

$$A(B+C)\overset{\text{전개한다.}}{=}\underbrace{AB+AC}_{\text{전개식}},\quad A(B+C+D)\overset{\text{전개한다.}}{=}\underbrace{AB+AC+AD}_{\text{전개식}}$$

- 전개 : 단항식과 다항식의 곱을 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것
  전개식 : 전개하여 얻은 다항식
- $AB=BA$이므로
  $A(B+C)=(B+C)A$

4. (다항식)÷(단항식)의 계산

[방법 1] 분수 꼴로 고쳐서 다항식의 각 항을 단항식으로 나누어 계산한다.

$$(A+B)\div C=\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$$

[방법 2] 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

$$(A+B)\div C=(A+B)\times\frac{1}{C}=A\times\frac{1}{C}+B\times\frac{1}{C}$$

- 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 혼합되어 있는 식은 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한 후 덧셈과 뺄셈을 계산한다.

2 곱셈 공식

1. 다항식의 곱셈

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

2. 곱셈 공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

- 곱셈 공식은 결국 다항식을 전개하여 간단히 한 것이므로 분배법칙을 이용하면 곱셈 공식을 모두 유도할 수 있다.
  예 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
  $=a^2+ab+ba+b^2$
  $=a^2+2ab+b^2$

Up grade

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$에 $b=1$을 각각 대입하면
  $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$,
  $(a-1)(a^2+a+1)=a^3-1$
  이 공식은 세제곱의 값을 구할 때 자주 이용된다.

3. 치환을 이용한 식의 전개 : 공통인 부분을 한 문자로 치환하여 전개한다.

예 $(a+b+c)(a+b-c)$에서 $a+b=A$로 치환하면
$(A+c)(A-c)=A^2-c^2=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$

3 곱셈 공식의 활용

1. 수의 계산

(1) 수의 제곱의 계산

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용한다.

(2) 두 수의 곱의 계산

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용한다.

2. 곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

(4) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$, $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4$

Up grade

(5) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(6) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

4 식의 대입

1. 식의 대입

(1) 주어진 식의 문자에 그 문자를 나타내는 다른 식을 대입하여 주어진 식을 다른 문자에 관한 식으로 나타내는 것

(2) x에 관한 식으로 나타내어라. ⇨ x항과 상수항만 있는 식으로 나타낸다.

예 $y=x-2$일 때, $2x-y$를 x에 관한 식으로 나타내면

$2x-y=2x-(x-2)=x+2$

• 다음은 같은 표현이다.
(x에 관한 식으로 나타내어라.)
=(x의 식으로 나타내어라.)
=(x를 사용하여 나타내어라.)

5 등식의 변형

1. 등식을 한 문자에 관하여 풀기

주어진 등식을 변형하여 한 문자를 다른 문자에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

(1) y에 관하여 푼다. ⇨ $y=$(다른 문자에 관한 식)

(2) x에 관하여 푼다. ⇨ $x=$(다른 문자에 관한 식)

예 등식 $3xy-2x=1$을 y에 관하여 풀면

$3xy=2x+1 \quad \therefore y=\frac{2x+1}{3x}$

Up grade

2. 비례식의 계산

비례식이 주어진 경우 비의 값을 비례상수 k라 하고, 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸 후 이를 식에 대입하여 계산한다.

(1) $a:b=c:d \Longleftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Longleftrightarrow a=ck,\ b=dk$

(2) $a:b:c=d:e:f \Longleftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f} \Longleftrightarrow a=dk,\ b=ek,\ c=fk$

• $a:b:c=x:y:z$에서 $ax=by=cz$로 풀지 않도록 주의한다.

Upgrade 집중연구

■ 곱셈 공식

곱셈 공식은 분배법칙을 이용하여 전개하면 알 수 있는 내용이지만 그 계산 과정이 복잡하므로 암기해 두는 것이 좋다.

(5) $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$
$=a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$
$=a^2+ab+ca+ab+b^2+bc+ca+bc+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(6) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+\underline{3a^2b+3ab^2}+b^3=a^3+b^3+\underline{3ab(a+b)}$

참고 $3ab(a+b)=3a^2b+3ab^2$이므로 $3a^2b+3ab^2$을 $3ab(a+b)$로 변형할 수 있다.

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

■ 곱셈 공식의 변형

곱셈 공식의 변형은 각 곱셈 공식에서 좌변과 우변의 항을 적당히 이항한 결과이므로 반드시 암기할 필요는 없으나 자주 이용되는 변형식은 기억해 두도록 한다.

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(6) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$에서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$에서 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

■ 비례식의 계산

(1) $a:b=c:d$이면

① $ad=bc$

② $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=k$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면 $a=ck$, $b=dk$

③ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$에서 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$, $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$, $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ (단, $a\neq b$, $c\neq d$)

④ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$ (단, $b+d\neq 0$)

(2) $a:b:c=d:e:f$이면

① $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{e}=\dfrac{c}{f}=k$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면 $a=dk$, $b=ek$, $c=fk$

② $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{e}=\dfrac{c}{f}=\dfrac{a+b+c}{d+e+f}$ (단, $d+e+f\neq 0$)

STEP 1 유형별 문제 공략하기

● 정답과 해설 p.13

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

참고 괄호는 소괄호( ) → 중괄호{ } → 대괄호[ ]의 순으로 풀어서 계산한다.

1-1 ●○○

다음을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{2a-b}{3}+\dfrac{2a-7b}{15}-\dfrac{b-a}{5}$

(2) $[5-3x-3\{2x^2-(3x-2x^2)+3\}]-6x+3$

1-2 ●○○

x^2-3x, $-3x^2+2x+4$, $4x-2$, $-x^2-3x$의 평균이 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

1-3 ●○○

$2x^2-5x+1$에 다항식 A를 더하면 $5x^2-x-3$이고, $-3x^2+x-6$에서 다항식 B를 빼면 $-2x^2+1$이다. 이때 $A+B$를 간단히 하여라.

1-4 ●●○

자연수 n에 대하여

$(-1)^{2n+1}(2x-y)+(-1)^{2n}(x+2y)-(-1)^{2n-1}(x+y)$

를 간단히 하여라.

2 단항식과 다항식의 곱셈과 나눗셈

1. (단항식)×(다항식) : 분배법칙을 이용하여 전개한다.
   $A(B+C)=AB+AC$
   $(A+B)\times C=AC+BC$
2. (다항식)÷(단항식)
   [방법 1] $(A+B)\div C=\dfrac{A+B}{C}=\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}$
   [방법 2] $(A+B)\div C=(A+B)\times\dfrac{1}{C}=\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}$

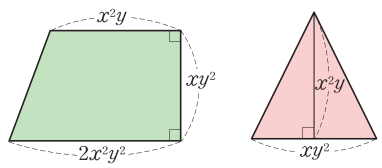
2-1 ●○○

$a=-2$, $b=3$일 때,

$\left(\dfrac{4}{3}a^3b^2-2a^4b\right)\div\left(-\dfrac{2}{3}ab\right)-\left(3ab-\dfrac{9}{2}a^2\right)\times\dfrac{5}{6}a$의 값을 구하여라.

2-2 ●○○

다음 그림에서 사다리꼴의 넓이는 삼각형의 넓이의 몇 배인지 구하여라.



2-3 ●●○

두 순서쌍 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 연산 ∘를 $(x_1,\ y_1,\ z_1)\circ(x_2,\ y_2,\ z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$라 약속할 때, 다음을 간단히 하여라.

$$(2x-1,\ -3y,\ 2xy)\circ(y,\ x+1,\ -3)$$

3 다항식의 곱셈

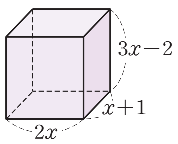
1. 분배법칙을 이용한다.

$$(a+b)(c+d)\overset{\text{전개한다.}}{=}\underbrace{ac+ad+bc+bd}_{\text{전개식}}$$

2. 특정한 항의 계수는 특정한 항이 나오는 부분만 전개하여 구한다.
3. 주어진 식의 계수의 총합은 모든 미지수에 1을 대입하여 구한 식의 값에서 상수항을 뺀 것과 같다.

3-1 ●○○

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 부피를 구하여라.



3-2 ●○○

$(x-2y+3z)^3$을 전개하였을 때, xyz항의 계수는?

① -60　② -48　③ -36
④ -24　⑤ -12

3-3 ●●○

두 자연수 a, b에 대하여 a를 6으로 나누면 나머지가 2이고, b를 9로 나누면 나머지가 8이다. 이때 ab를 6으로 나눈 나머지를 구하여라.

3-4 ●●○

$(x+3y-1)^2(-3x+ay+5)$를 전개하면 상수항을 제외한 각 항의 계수의 총합이 22이고, x^2y항의 계수는 b이다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

4 곱셈 공식(Ⅰ)

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
　 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

4-1 ●○○

다음 다항식을 전개한 식이 Ax^2+Bx+C일 때, 상수 A, B, C에 대하여 ABC의 값을 구하여라.

$$(2x-3)(2x+3)-3(x+2)^2+(3x+5)(3x-2)$$

4-2 ●●○

$(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2(x^4+16)^2=x^a-b\times x^c+2^d$ 일 때, 자연수 a, b, c, d의 값을 각각 구하여라.

4-3 ●●○

a, b는 자연수이고 $3(x+a)^2+(4x-b)(2-x)$를 전개하면 x항의 계수가 16일 때, 상수항을 구하여라.

4-4 ●●●

네 자연수 a, b, c, d에 대하여
$(ax+b)(cx+d)=3x^2+Ax+2$일 때, 다음 중 상수 A의 값으로 가능한 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 2　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 8

Upgrade

5 곱셈 공식(Ⅱ)

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

5-1

다음 식을 전개하여라.

(1) $(3a-b+2c)^2$

(2) $(2x-3y)^3$

(3) $(-x+2y)(x^2+2xy+4y^2)$

5-2

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y)^3(x-y)^3$

(2) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

6 치환을 이용한 식의 전개

(1) 복잡한 다항식의 전개는 공통인 부분을 한 문자로 치환하여 곱셈 공식을 적용할 수 있는 꼴로 변형한다.

예 $(x+y+1)(x+y-1)$ ← $x+y=A$로 치환

$=(A+1)(A-1)$ ← A에 대한 식을 전개

$=A^2-1$ ← A에 $x+y$를 대입

$=(x+y)^2-1$ ← 전개하여 정리

$=x^2+2xy+y^2-1$

(2) 공통인 부분이 바로 보이지 않을 때에는 공통인 부분이 나올 수 있도록 적당히 묶어서 전개한다.

예 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ← 상수항의 합이 같아지도록 묶기

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(\underline{x^2+5x}+4)(\underline{x^2+5x}+6)$

6-1

다음 식을 전개하여라.

(1) $(3-x+y)(2+x-y)$

(2) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

6-2

$a^2-b^2=1$일 때, 자연수 n에 대하여

$\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$의 값을 구하여라.

6-3

다음 식을 전개하여라.

(1) $x(x+1)(x-2)(x-3)$

(2) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)$

(3) $(x-2)(3x+1)(x+2)(3x-11)$

7 곱셈 공식의 활용

1. 수의 계산

(1) 수의 제곱의 계산은

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용한다.

(2) 두 수의 곱의 계산은

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용한다.

2. 도형에서의 활용

주어진 도형에서 길이, 넓이, 부피 등을 나타내는 식을 세운 후 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

7-1

다음을 곱셈 공식을 이용하여 계산하여라.

(1) $151\times151-149\times152-149\times150+146\times153$

(2) $11\times909\times10001+1$

7-2 ●○○

곱셈 공식을 이용하여 799^2을 계산하였을 때, 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

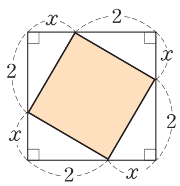
7-3 ●○○

$(13+12)(13^2+12^2)(13^4+12^4)$을 간단히 하면?

① 13^6-12^6 ② 13^6+12^6 ③ 13^8-12^8
④ 13^8+12^8 ⑤ $13^{16}-12^{16}$

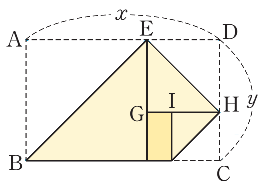
7-4 ●○○

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $x+2$인 정사각형에서 4개의 합동인 직각삼각형을 잘라냈을 때 생기는 사각형의 넓이를 구하여라.



7-5 ●●○

가로의 길이가 x, 세로의 길이가 y인 직사각형 모양의 종이를 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $\overline{BF}$에, $\overline{ED}$를 $\overline{EG}$에, $\overline{HC}$를 $\overline{HI}$에 완전히 겹치도록 접었을 때, 사각형 GFJI의 넓이를 구하여라. (단, $0<y<x$)



8 곱셈 공식의 변형(Ⅰ)

다음과 같이 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구한다.

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2$

(4) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4$
$\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4$

(5) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(6) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

8-1 ●○○

$x^2+y^2=13$, $x+y=-1$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 값을 구하여라.

8-2 ●○○

$x+\dfrac{1}{x}=4$일 때, $x^4+\dfrac{1}{x^4}$의 값을 구하여라.

8-3 ●●○

$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$일 때, abc의 값을 구하여라.

8-4 ●●○

$(x+y)^2-(x-y)^2=12$, $(x-5)(y-5)=3$일 때, x^3+y^3의 값을 구하여라.

9 곱셈 공식의 변형(Ⅱ)

다음과 같이 주어진 식을 곱셈 공식을 이용할 수 있는 형태로 변형한다.

1. $x+\frac{1}{x}$의 값 구하기

$x^2-ax+1=0$이 주어진 경우

$x\neq0$이므로 $x^2-ax+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-a+\frac{1}{x}=0$ ⇨ $x+\frac{1}{x}=a$

Upgrade

2. x^3의 값 구하기

$x^2+x+1=0$이 주어진 경우

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

⇨ $x^3-1=0$, 즉 $x^3=1$

9-1 ●○○

$x^2+6x+1=0$일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하여라.

9-2 ●●○

$x^2-4x-1=0$일 때, $x^3+2x-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80

④ 84 ⑤ 88

9-3 ●●○

$x^2+x+1=0$일 때, $x^9+\frac{1}{x^9}$의 값을 구하여라.

10 식의 대입

$a=2b+3$일 때, $3a+5b-1$을 b에 관한 식으로 나타내면

$3a+5b-1$

$=3(2b+3)+5b-1$ ← a에 $2b+3$을 대입

$=6b+9+5b-1$ ← 간단히 정리

$=11b+8$ → b항과 상수항만 남는다.

10-1 ●○○

$y=4x+1$일 때, $y-4+2(-5x+y)$를 x에 관한 식으로 나타내어라.

10-2 ●●○

$A=\frac{3x^3+6x^2-9x}{3x}$, $B=(2x^3+4x^2-8x)\div(-2x)$, $C=x^2-x-1$일 때, 다음 식을 x에 관한 식으로 나타내어라.

$$2A-[3B-4C-\{A-2(B-3C)\}]$$

10-3 ●●○

$2x-y+3=0$, $z=\frac{x+y}{2}$일 때, $y+2z$를 x에 관한 식으로 나타내면 $ax+b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

11 등식을 한 문자에 관하여 풀기

x에 관하여 푼다. ⇨ $x=$(다른 문자에 관한 식)
y에 관하여 푼다. ⇨ $y=$(다른 문자에 관한 식)

예 $-2x+y+1=2y+x$를

x에 관하여 풀면 $-3x=y-1$ $\quad \therefore x=\frac{-y+1}{3}$

y에 관하여 풀면 $-y=3x-1$ $\quad \therefore y=-3x+1$

11-1

등식 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{3}{c}$을 b에 관하여 풀면?

① $b=\frac{ac}{3a-2c}$ ② $b=\frac{2ac}{3a-c}$
③ $b=\frac{3a-2c}{ac}$ ④ $b=\frac{3a-c}{2ac}$
⑤ $b=\frac{2a-c}{3ac}$

11-2

다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

① $a=\frac{S}{1+rn}$ ② $r=\frac{S}{an}-\frac{1}{n}$
③ $S=a(1+rn)$ ④ $n=\frac{S-a}{ar}$
⑤ $n=\frac{S}{a}-\frac{1}{r}$

11-3

$y=\frac{ax+b}{ax-b}$를 x에 관하여 풀어라.

12 등식을 변형하여 식의 값 구하기

1. x, y에 관한 등식이 주어지는 경우
등식을 한 문자에 관하여 정리한 후 주어진 식에 대입한다.
2. x, y, z에 관한 등식이 주어지는 경우
두 문자를 한 문자에 관하여 정리한 후 주어진 식에 대입한다.

12-1

$a+\frac{1}{b}=1$, $b+\frac{1}{c}=1$일 때, abc의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

12-2

$\frac{3x-2y}{5}=\frac{x+2y}{2}$일 때, $\frac{x-3y}{5x-4y}$의 값을 구하여라.

12-3

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$일 때, $\frac{5a-2ab+5b}{a+b}$의 값은?

① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

12-4

$a+b+c=0$을 만족하는 세 수 a, b, c에 대하여
$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{a+c}{a}+\frac{b+c}{b}$의 값을 구하여라. (단, $abc\neq0$)

12-5

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=1$일 때, $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}$의 값을 구하여라.

13 비례식을 변형하여 식의 값 구하기

x, y에 관한 비례식이 주어질 때

(1) 비례식을 x, y에 관한 등식으로 변형한 후 주어진 식에 대입한다.

(2) 비례식의 계산

① $a:b=c:d$ ⇨ $a=ck$, $b=dk$ (단, $k\neq0$)

Up grade

② $a:b:c=d:e:f$

⇨ $a=dk$, $b=ek$, $c=fk$ (단, $k\neq0$)

13-1

$a:b:c=1:2:5$일 때,

$(3a+b)^2\times ab^2\div ab(-2c)^2\div\dfrac{b}{8}$의 값을 구하여라.

13-2

$(2x-3y):(5x-4y)=3:1$일 때, $\dfrac{2x+y}{2x-y}$의 값을 구하여라.

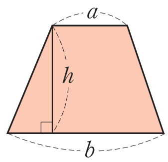
13-3

$a:b:c=x:y:z$일 때,

$x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)$의 값을 구하여라.

14 등식의 변형의 활용

오른쪽 그림과 같은 사다리꼴의 넓이를 S라 하면



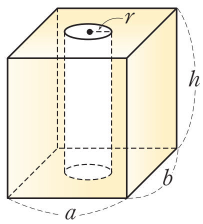
$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

이 식을 h에 관하여 풀면

$$h=\frac{2S}{a+b}$$

14-1

오른쪽 그림은 밑면의 가로와 세로의 길이가 각각 a, b이고 높이가 h인 직육면체에서 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥 모양을 잘라내고 남은 입체도형이다. 이 입체도형의 부피를 V라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) V를 a, b, h, r에 관한 식으로 나타내어라.

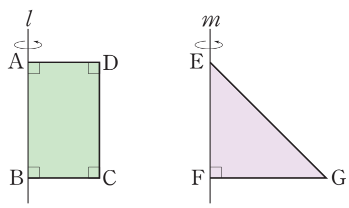
(2) (1)의 식을 h에 관하여 풀어라.

14-2

농도가 $a\%$인 소금물과 농도가 $b\%$인 소금물을 $1:2$의 비율로 섞어서 농도가 $c\%$인 소금물을 만들었다. 이때 c를 a, b에 관한 식으로 나타내어라.

14-3

직사각형 ABCD와 직각삼각형 EFG에서 $\overline{AB}=\overline{EF}$, $\overline{AD}=\dfrac{2}{3}\overline{FG}$이다. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD를 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 V_1, 직각삼각형 EFG를 직선 m을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 V_2라 하자. 이때 V_2를 V_1에 관한 식으로 나타내어라.



● 정답과 해설 p.17

01

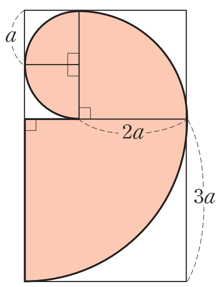
두 다항식 A, B와 상수 k에 대하여 연산 $*$를 $A*B=A+kB$라 약속하자. $A=x^2+3x-4$, $B=x^2+5x+2$일 때, $(A*B)*B=-x^2-7x-8$이 성립한다. 상수 k의 값을 구하여라.

02

네 수 a, b, c, d에 대하여 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$라 약속하자. 예를 들어 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$이다. 이때 $\begin{vmatrix} 3x-2y & -(x+2y) \\ 3x & -2y \end{vmatrix}$를 간단히 하여라.

03

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 a, $2a$, $3a$인 정사각형을 이용하여 중심각의 크기가 90°인 부채꼴의 호를 이어 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



04

십의 자리의 숫자가 4인 두 자리의 자연수 A, B가 있다. A의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수를 C라 하고, B의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수를 D라 하면 $AB=CD$이다. 이때 A, B의 값을 각각 구하여라. (단, $A>B$)

05

$(x^3+ax^2+2)(x^2+x+b)$를 전개한 다항식에서 x^2, x^3의 계수가 모두 1일 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

(단, a, b는 상수)

06

다음 식을 전개하여라.

$$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$$

07

$f(x)=1+\dfrac{1}{3^x}$ 일 때, 다음 등식을 만족하는 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

(단, b와 3은 서로소이다.)

$$f(1)f(2)f(4)f(8)=\frac{3^a-1}{b\times 3^c}$$

08

다음을 계산하여라.

$$98\times(2^4\times5^4+2^3\times5^2+2^2)+102\times(2^4\times5^4-2^3\times5^2+2^2)$$

09

연속하는 세 자연수 x, y, z에 대하여 $x^2+z^2=202$일 때, z^3-x^3의 값을 구하여라. (단, $x<y<z$)

10

$a+b=-3$, $ab=1$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

11

$ab+bc+ca=-5$, $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{2}$, $abc=2$일 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값을 구하여라.

12

$a+b+c=3$, $ab+bc+ca=-6$, $abc=-3$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하여라.

13

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a-b}$일 때, $\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}$의 값을 구하여라.

14

$x-1+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^3+x^6+x^9$의 값은? (단, $x\neq0$)

① -2 ② -1 ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

15

$2x^2-6x+1=0$일 때, $x^4+\frac{1}{16x^4}$의 값은?

① $\frac{127}{3}$ ② $\frac{127}{2}$ ③ 127

④ 128 ⑤ 129

16

$A=x^2+1$일 때, $\dfrac{x^2-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$을 A에 관한 식으로 나타내어라.

17

$b=\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$을 a에 관하여 풀어라. (단, $a\neq1$, $b\neq1$)

18

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$을 x에 관하여 풀어라. (단, $yz\neq1$)

19

두 양수 x, y에 대하여 $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y}=1$일 때, $\frac{2x+2y+1}{xy+x+y}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ 4

20

0이 아닌 세 유리수 x, y, z에 대하여 $2x=3y=5z$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{y^2-yz+z^2}$의 값을 구하여라.

21

$a+b+c=0$일 때, $\dfrac{bc+ca}{ab}+\dfrac{ca+ab}{bc}+\dfrac{ab+bc}{ca}$의 값을 구하여라. (단, $abc\neq0$)

22

$a:b=4:3$, $c:d=3:5$, $d:b=2:3$일 때, $a:c$는?

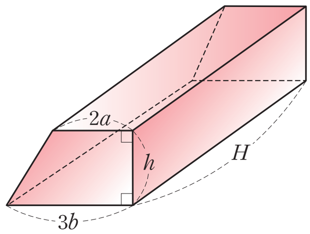
① 3 : 4 ② 5 : 2 ③ 7 : 3
④ 9 : 2 ⑤ 10 : 3

23

수학 시험 점수가 p점인 학생 12명과 q점인 학생 8명의 전체 평균을 구하는데 계산을 잘못하여 $\dfrac{3p+q}{4}$점이 되었다. 이 점수는 실제 평균보다 $\dfrac{3}{2}r$점이 높은 점수일 때, r를 p, q를 사용하여 나타내어라.

24

다음 그림은 밑면이 사다리꼴인 사각기둥이다. 사각기둥의 부피가 $4a^3bh+6a^2b^2h$일 때, 이 사각기둥의 높이 H를 a, b, h에 관한 식으로 나타내어라.



25

A, B 두 개의 그릇에 각각 13 %의 소금물 200 g과 7 %의 소금물 100 g이 들어 있다. A, B 두 그릇의 소금물에서 각각 x g씩 덜어내어 서로 바꾸어 섞었더니 A 그릇의 소금물의 농도가 y %가 되었다. 이때 y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

● 정답과 해설 p.19

Tip

01 다음과 같이 일정한 규칙으로 나열한 자연수 중에서 $\langle x, y\rangle$는 위에서 x번째, 왼쪽에서 y번째 수를 나타낸다. 예를 들어 $\langle 2, 3\rangle=10$, $\langle 3, 4\rangle=15$이다. 이때 $\langle 1, a\rangle\times\langle 2, a+1\rangle-\langle 3, a+2\rangle\times\langle 4, a+3\rangle$을 a를 사용하여 나타내어라.

(단, a는 자연수)

1	5	9	13	⋯
2	6	10	14	⋯
3	7	11	15	⋯
4	8	12	16	⋯

각각의 수들이 나열된 규칙을 찾는다.

02 다음 조건을 모두 만족하는 a, b, x, y에 대하여 ax^5+by^5의 값을 구하여라.

조건

(가) $x+y=1$　　(나) $ax+by=8$

(다) $ax^2+by^2=10$　　(라) $ax^3+by^3=26$

주어진 조건의 식의 형태를 살펴본다.

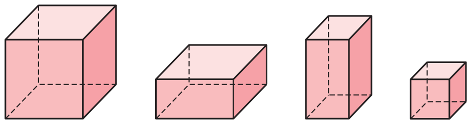
03 $xy\neq0$, $x^2+5xy+y^2=0$일 때, $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{y^3}{x^3}$의 값을 구하여라.

주어진 등식을 변형하여 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$의 값을 구한다.

04 $(x+1)^{n+2}=(x+1)^{n+1}-(x+1)^n$일 때, $x^{101}+\dfrac{1}{x^{11}}$의 값을 구하여라. (단, $x\neq-1$)

$(x+1)^n$으로 주어진 등식을 나눈다.

05 다음 그림과 같은 네 종류의 직육면체 A, B, C, D가 있다.



종류	밑면의 가로의 길이	밑면의 세로의 길이	높이
A	x	x	x
B	x	x	y
C	y	y	x
D	y	y	y

이를 이용하여 정육면체를 만들었더니 모두 64개의 직육면체가 사용되었다고 한다. 직육면체 A는 한 개만 사용했을 때, 새로 만든 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

Tip 정육면체의 부피를 이용한다.

06 $m=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$이라 할 때, 다음을 m에 관한 식으로 나타내어라.

$$A+\frac{(2x_1-A)f_1+(2x_2-A)f_2+(2x_3-A)f_3+\cdots+(2x_n-A)f_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$$

주어진 식을 정리한 다음 조건을 대입한다.

07 $a:b=b:c=c:d$일 때, $\dfrac{a}{a+b+c+d}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$을 간단히 하여라. (단, $abcd\neq 0$)

$a:b=b:c=c:d$이므로 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$이다.

퍼펙트 단원 마무리

● 정답과 해설 p.20

01

분수 $\frac{4}{13}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 x_n이라 하자. 이때
$x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{59}-x_{60}$의 값을 구하여라.

02

다음 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 분수 $\frac{6y}{20x}$를 소수로 나타냈을 때, 순환소수인 것은?

① $(3,\ 4)$ ② $(9,\ 6)$ ③ $(12,\ 6)$
④ $(18,\ 15)$ ⑤ $(27,\ 12)$

03

다음 조건을 모두 만족하는 A의 값을 구하여라.

조건
(가) A는 세 자리의 홀수이다.
(나) $\frac{A}{630}$는 유한소수이다.
(다) $\frac{A}{630}\times 40$은 어떤 자연수의 제곱이다.

04 |경시 기출 유사|

다음 조건을 모두 만족하는 순환소수 A를 기약분수로 나타낼 때, 분모로 가능한 수의 개수를 구하여라.

조건
(가) A는 1보다 작은 양수이다.
(나) A의 순환마디는 소수점 아래 첫째 자리부터 시작한다.
(다) A의 순환마디의 숫자의 개수는 3개이다.

05

서로 다른 한 자리의 자연수 $m,\ n$에 대하여
$$\langle m,\ n\rangle=2(0.\dot{m}+0.\dot{n})-(0.\dot{m}\dot{n}+0.\dot{n}\dot{m})$$
이라 할 때, $\langle 2,\ 4\rangle\le\langle m,\ n\rangle\le\langle 3,\ 5\rangle$를 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하여라.

06

자연수 n에 대하여 다음 식을 간단히 하여라.

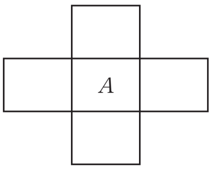
$$(-x)^n\times(-x)^{n+1}\div x^n+x^{2n}\div x^{n+1}\times x^2$$

07

$85^a=3$, $85^b=5$일 때, $17^{\frac{3a+b}{1-b}}$의 값을 구하여라.

08

다음 그림과 같은 5개의 칸에 다섯 개의 수 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6을 각각 한 개씩 써넣어서 가로 칸의 수들의 곱과 세로 칸의 수들의 곱이 같아지도록 하려고 한다. 이때 A에 넣을 수 있는 수를 모두 구하여라.



09

다음과 같은 규칙으로 수를 나열하면 2^6은 2^6, 4^3, 8^2, 64처럼 다른 모양으로 총 4번 나타난다. 이때 9^{12}은 몇 번 나타나는가?

1	2	3	4	5	$\cdots$
1	2^2	3^2	4^2	5^2	$\cdots$
1	2^3	3^3	4^3	5^3	$\cdots$
1	2^4	3^4	4^4	5^4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

① 5번 ② 6번 ③ 7번
④ 8번 ⑤ 9번

10

자연수 n에 대하여 $1^n+2^n+3^n$을 10으로 나눈 나머지를 $f(n)$이라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(5)=f(7)$
ㄴ. $f(n)=f(n+4)$
ㄷ. $f(4n)=f(4n+2)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

11

1이 아닌 양수 a에 대하여
$\dfrac{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}+\cdots+a^{-10}}{a^{-11}+a^{-12}+a^{-13}+\cdots+a^{-20}}=a^x$일 때, x의 값을 구하여라.

12

자연수 n에 대하여 다음과 같은 규칙으로 $P(n)$을 약속할 때,
$P(10)-P(9)+P(8)-P(7)+\cdots+P(2)-P(1)$을 x에 관한 식으로 나타내어라.

$$\begin{aligned}
&P(1)=1+x,\\
&P(2)=1+x+2x^2,\\
&P(3)=1+x+2x^2+3x^3,\\
&\qquad\vdots\\
&P(n)=1+x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n
\end{aligned}$$

13

자연수 a, b에 대하여 $(x+a)(x+b)=x^2+10x+c$일 때, c의 최댓값은?

① 9 ② 16 ③ 21
④ 25 ⑤ 30

14

다음 조건을 모두 만족하는 네 수 a, b, c, d에 대하여 x, y를 $x=ac+bd$, $y=ad+bc$라 할 때, x^2+y^2의 값을 구하여라.

조건
(가) $a^2+b^2=20$ (나) $ab=8$
(다) $c+d=-3$ (라) $cd=2$

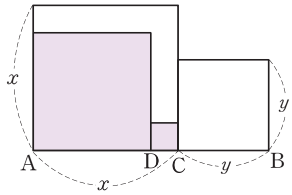
15

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

$$\frac{3720}{3726^2-3724\times 3729}$$

16

다음 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형이 있다. 이때 $\overline{AB}$의 중점 D에 대하여 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형을 만들었다.
$\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$일 때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y를 사용하여 나타내면? (단, $x>y$)



① x^2+y^2 ② $\frac{x^2+y^2}{2}$ ③ $\frac{x^2-y^2}{2}$
④ $\frac{x^2+y^2}{4}$ ⑤ $\frac{x^2-y^2}{4}$

17

$a+b+c=5$, $ab+bc+ca=7$일 때,
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$의 값을 구하여라.

18

$x^2+x+1=0$일 때, $x^{-8}+3x^3+x^8$의 값을 구하여라.

19 | 과고 기출 유사 |

$A=(12x^5y^4-8x^4y^5)\div(-2xy^2)^2$,

$B=x(x+1)^2-2y(x-1)^2$일 때,

$A-(B-2C)=2x^3+3x+4y$를 만족하는 다항식 C를 구하여라.

20

세 양수 x, y, z에 대하여 $xyz=1$, $x+\frac{1}{z}=b$, $y+\frac{1}{x}=c$이다. 이때 $z+\frac{1}{y}$을 b, c에 관한 식으로 나타내어라.

21 | 자사고 기출 유사 |

양의 유리수 a, b, c, d에 대하여

$abc : bcd : cda : dab=1:2:3:4$일 때,

$a:b:c:d$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

22

$xyz=1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{y+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{z+\frac{1}{y}+1}+\frac{1}{x+\frac{1}{z}+1}$$

23

A중학교의 1학년 학생 수는 전체 학생 수의 $\frac{1}{3}$이고, 2학년과 3학년의 학생 수의 비는 $5:6$이다. 1학년과 2학년의 학생 수를 각각 a명, b명이라 할 때, b를 a에 관한 식으로 나타내어라.

24

다음 표는 제품 P, Q를 한 개 조립하는데 필요한 부품 A, B, C의 개수를 나타낸 것이다.

제품 \ 부품	A	B	C
P	1	1	0
Q	1	1	1

부품 C를 45개 살 수 있는 비용으로 제품 P를 36개 조립할 수 있다고 할 때, 이 비용으로 조립할 수 있는 제품 Q의 개수를 구하여라.

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기

1 다음은 분수 $\frac{1}{7}$을 순환소수로 나타내는 과정이다. 물음에 답하여라.

> 분수 $\frac{1}{7}$을 나눗셈 $1 \div 7$을 이용하여 소수로 나타내면 오른쪽과 같이 각 계산 단계에서 나머지가 차례로 3, 2, 6, 4, 5, 1, …이 된다.
>
> 이때 나머지는 7보다 작아야 하므로 적어도 7번째 안에는 같은 수가 나타나게 되고 같은 수가 나타나면 그때부터는 같은 몫이 되풀이되어 순환마디가 생기게 된다. 즉,
>
> $$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$$
>
> 이다.
>
> $$\begin{array}{r} 0.142857 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 1 \end{array}$$
>
> 같다.

(1) 분수 $\frac{2}{7}$를 $\frac{1}{7}$을 이용하여 순환소수로 나타내고 그 과정을 설명하여라.

(2) 7의 배수가 아닌 자연수 n에 대하여 분수 $\frac{n}{7}$을 순환소수로 나타낼 때 그 순환마디의 규칙에 대하여 설명하여라.

답안 작성

출제 의도 주어진 제시문에서 분수를 순환소수로 나타내는 과정을 이해하고 규칙성을 찾을 수 있는가를 묻는 문제로 분수 $\frac{1}{7}$을 나눗셈을 이용하여 소수로 나타내는 과정에서 나머지가 어떻게 나타나는지를 살펴보고 $\frac{n}{7}$을 순환소수로 나타낼 때의 순환마디의 규칙성에 대해 논리적으로 설명할 수 있도록 한다.

정답과 해설 p.23

2

다음은 선생님과 수현이의 대화이다.

수현 : 선생님! 일의 자리의 숫자가 5인 두 자리의 자연수의 제곱을 쉽게 할 수 있는 방법을 알았어요. 끝의 두 자리의 수는 무조건 5의 제곱인 25가 되고, 25의 앞에는 제곱하려는 자연수의 십의 자리의 숫자와 거기에 1을 더한 수를 곱한 값을 쓰면 돼요. 예를 들면 85의 제곱은 일단 25를 쓰고, 그 앞에 십의 자리의 숫자인 8과 8에 1을 더한 수인 9를 곱한 값 72를 쓰면 7225가 되는 거죠.

5^2

$$85^2=7225$$

$8\times(8+1)=8\times9$

선생님 : 대단한 발견을 했구나! 그럼 네가 발견한 사실이 항상 옳다는 것을 곱셈 공식을 이용하여 설명해 볼 수 있겠니?

수현 : 곱셈 공식을 이용해서요?

위의 대화에서 수현이가 발견한 사실을 문자를 사용하여 논리적으로 설명하여라.

답안 작성

출제 의도 주어진 글에 나타나는 수학적 사실을 문자를 사용한 식을 이용하여 논리적으로 설명할 수 있는가를 묻는 문제이다. 주어진 문장을 문자가 들어간 식으로 나타내고 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개하여 그 식이 갖는 의미를 해석하고 일반화할 수 있도록 한다.

나만의 수학

블로그 Blog

흥미롭고 신기한 수학의 세상
수준 높은 수학 이야기로 나만의 수학 블로그를 만들어 보세요~~

• 모든 원의 둘레의 길이는 같다?

다음은 아리스토텔레스의 바퀴의 역설에 관한 내용이다.

아래 그림과 같이 점 A에서 땅에 접한 원 위의 한 점이 한 바퀴 굴러 점 C에서 다시 땅에 접했고, 반지름 OA 위의 한 점 B도 한 바퀴 돌아서 점 D에 머물렀을 때,

$\overline{AC}$=(반지름이 $\overline{OA}$인 원의 둘레의 길이), $\overline{BD}$=(반지름이 $\overline{OB}$인 원의 둘레의 길이)이다.

그런데 그림에서 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 '큰 원의 둘레의 길이와 작은 원의 둘레의 길이가 같다', 즉 '크기에 상관없이 모든 원의 둘레의 길이는 같다' 라는 결론이 나온다.

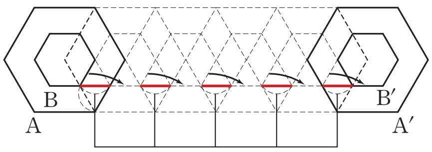
이 결론은 분명 잘못된 것인데 어디가 잘못된 것일까?

정육각형의 회전을 통해 그 궁금증을 해결해 보자.

아래 그림에서 보면 작은 정육각형은 큰 정육각형과는 달리 한 번 회전할 때 5번 미끄러진다.

즉, $\overline{AA'}$=(큰 정육각형의 둘레의 길이)이지만 $\overline{BB'}$=(작은 정육각형의 둘레의 길이)+(5번 미끄러진 길이)

임을 알 수 있다.



작은 정육각형은 5번 미끄러진다.

그렇다면 정100각형의 경우에는 어떨까? 정100각형 또한 작은 정100각형은 큰 정100각형과 달리 한 번 회전할 때 99번 미끄러진다.

이제 아리스토텔레스의 바퀴 문제를 다시 생각해 보자.

원은 정n각형의 변의 개수를 무한히 늘린 것으로 생각할 수 있으므로 큰 원은 땅에 밀착해서 한 바퀴 회전하지만 이와 달리 작은 원은 굴러가면서 계속 미끄러진다. 따라서

$\overline{BD}$=(반지름이 $\overline{OB}$인 원의 둘레의 길이)+(미끄러진 길이)

가 된다.

Ⅱ

연립방정식

1 연립방정식

1 미지수가 2개인 일차방정식

1. 미지수가 2개인 일차방정식과 그 해

두 미지수 x, y에 대한 일차방정식은

$$ax+by+c=0 \text{ (단, } a, b, c\text{는 상수, } a\neq 0, b\neq 0)$$

과 같이 나타내어진다. 이때 이 일차방정식을 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)를 일차방정식의 해라고 한다.

- 주어진 식이 미지수가 2개인 일차방정식인지 확인하려면 주어진 식을 간단히 정리한 후
  ① 등식인지
  ② 미지수 2개를 포함하고 있는지
  ③ 각 미지수에 대한 1차식인지
  를 모두 확인하면 된다.

Up grade

2. 부정방정식

방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적을 때에는 해를 정할 수 없게 되는데, 이러한 방정식을 부정방정식이라고 한다.

2 연립일차방정식

1. 연립일차방정식과 그 해

미지수가 2개인 일차방정식 두 개를 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 연립일차방정식(또는 연립방정식)이라 한다. 이때 연립방정식을 이루고 있는 두 일차방정식을 동시에 만족하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)를 연립방정식의 해라고 한다.

- 일반적으로 2개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 연립방정식이라고 한다.

2. 연립일차방정식의 풀이

미지수 하나를 없애 한 미지수에 관한 일차방정식을 만들어 해를 구한다.

(1) 가감법 : 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 연립방정식의 해를 구하는 방법

(2) 대입법 : 한 일차방정식을 어느 한 미지수에 관하여 풀고, 이것을 다른 일차방정식에 대입하여 연립방정식의 해를 구하는 방법

- 연립방정식의 두 일차방정식에서 한 미지수를 없애는 것을 미지수를 소거한다고 한다.
- 가감법으로 연립방정식을 풀 때에는 두 일차방정식에 적당한 수를 곱하여 없애려는 미지수의 계수의 절댓값을 같게 만든다.

3. 복잡한 연립방정식의 풀이

(1) 괄호가 있는 경우 : 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼 후 정리하여 간단히 한다.

(2) 계수가 분수나 소수인 경우 : 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 만든다.

Up grade

(3) 분모에 미지수가 들어 있는 경우 : 분모에 미지수가 들어 있는 분수를 각각 다른 문자로 치환하여 치환한 문자에 대한 연립방정식을 만든다.

4. $A=B=C$ 꼴의 방정식

$\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$ 중 가장 간단한 것을 택하여 푼다.

Up grade

5. 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

[방법 1] 세 미지수 중 한 미지수를 없애 미지수가 2개인 연립일차방정식으로 만들어 푼다.

[방법 2] 세 방정식을 모두 더했을 때 각 미지수의 계수가 같아지는 경우에는 더해서 얻은 식에서 각 일차방정식을 더하거나 빼서 푼다.

6. 해가 특수한 연립방정식

(1) 해가 무수히 많은 연립방정식

두 방정식을 변형하였을 때, 미지수의 계수와 상수항이 각각 같다.

⇨ 한 미지수를 없앴을 때, $0\times x=0$ 또는 $0\times y=0$의 꼴

(2) 해가 없는 연립방정식

두 방정식을 변형하였을 때, 미지수의 계수는 각각 같고 상수항은 다르다.

⇨ 한 미지수를 없앴을 때, $0\times x=k$ 또는 $0\times y=k$의 꼴 (단, $k\neq 0$인 상수)

• 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$에서

(1) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$이면 해가 무수히 많다.

(2) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$이면 해가 없다.

Upgrade 집중연구

■ 부정방정식

부정방정식은 대부분의 경우 부족한 방정식을 대신하여 미지수에 대한 조건이 주어지는데 이 조건을 이용하여 부정방정식의 해를 구할 수 있다. 부정방정식의 대표적인 형태는 다음과 같다.

(1) 미지수가 자연수인 경우 : 주어진 미지수에 자연수를 대입하여 방정식을 만족하는 순서쌍을 구한다.

예 방정식 $x+y=3$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$이다.

(2) 미지수가 정수인 경우 : 주어진 방정식을 (다항식)×(다항식)=(상수)의 형태로 변형하여 방정식을 만족하는 순서쌍을 구한다.

예 방정식 $xy-x+3=0$을 만족하는 정수 x, y를 구하면

$x(y-1)=-3$에서 x와 $y-1$은 정수이므로 순서쌍 $(x,\ y-1)$은

$(-3,\ 1)$, $(-1,\ 3)$, $(1,\ -3)$, $(3,\ -1)$

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-3,\ 2)$, $(-1,\ 4)$, $(1,\ -2)$, $(3,\ 0)$이다.

■ 연립방정식의 풀이

(1) 분모에 미지수가 들어 있는 경우

예 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=4 \end{cases}$에서 $\dfrac{1}{x}=A$, $\dfrac{1}{y}=B$로 치환하면 $\begin{cases} A+3B=3 \\ 2A+5B=4 \end{cases}$

$\therefore\ A=-3,\ B=2$, 즉 $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{2}$

(2) 미지수가 3개인 경우

예 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots ㉠ \\ y+z=4 & \cdots ㉡ \\ z+x=5 & \cdots ㉢ \end{cases}$을 풀면

[방법 1] ㉡−㉢에서

$y-x=-1$ ⋯ ㉣

㉠+㉣을 하면 $2y=2$ $\quad\therefore\ y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x=2$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $z=3$

$\therefore\ x=2,\ y=1,\ z=3$

[방법 2] 변끼리 더하면 $2x+2y+2z=12$이므로

$x+y+z=6$ ⋯ ㉣

㉣−㉠을 하면 $z=3$

㉣−㉡을 하면 $x=2$

㉣−㉢을 하면 $y=1$

$\therefore\ x=2,\ y=1,\ z=3$

STEP 1 유형별 문제 공략하기

● 정답과 해설 p.24

1 미지수가 2개인 일차방정식(자연수 조건)

두 미지수 x, y에 대한 일차방정식
$ax+by+c=0$(단, $a\neq0$, $b\neq0$)에서
(1) x, y에 대한 특별한 조건이 없는 경우 : 해는 무수히 많다.
(2) x, y가 자연수인 경우 : 알맞은 수를 대입하거나 약수와 배수의 성질을 이용한다.
예 $2x+3y=15$에서 x, y가 자연수이면
$2x=15-3y=3(5-y)$이므로
x는 3의 배수이고, $5-y$는 2의 배수이다.

1-1 ●○○

두 수 m, n에 대하여 연산 $\circ$을 $m\circ n=2m+3n$으로 약속하자. 이때 자연수 x, y에 대하여 방정식 $2x\circ 3y=21$의 해를 구하여라.

1-2 ●○○

순서쌍 $(-4,\ 5)$가 x, y에 대한 일차방정식 $ax-by=-13$의 해일 때, 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하여라.

1-3 ●●○

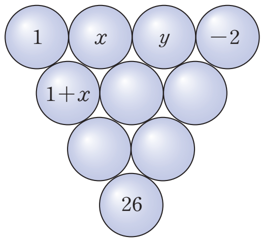
자연수 x, y에 대하여 일차방정식 $3x-2y=a+2x-3y$를 만족하는 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$가 한 개뿐일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

1-4 ●●○

일차방정식 $-2x+5y=6$을 만족하는 두 자연수 x, y의 최소공배수가 28일 때, $x+y$의 값을 구하여라.

1-5 ●●○

오른쪽 그림에서 ◯ 안의 수는 바로 위의 양 옆의 ◯ 안의 수의 합이다. x, y가 자연수일 때, 오른쪽 그림을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.



Upgrade

2 미지수가 2개인 방정식(정수 조건)

두 미지수 x, y에 대한 방정식에서 x, y가 정수인 경우
(일차식)×(일차식)=(정수)
의 꼴로 변형하여 해를 구한다.

2-1 ●○○

x, y에 대한 방정식 $(x+1)(y-2)=15$를 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 6개 ② 8개 ③ 10개
④ 12개 ⑤ 15개

2-2 ●●○

x, y가 정수일 때, 방정식 $3xy-6x-9=0$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$를 모두 구하여라.

3 연립일차방정식의 풀이

1. 가감법 : 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 해를 구한다.
2. 대입법 : 한 일차방정식을 한 문자에 관하여 푼 후, 다른 일차방정식에 대입하여 해를 구한다.

참고 한 일차방정식이 $x+by+c=0$ 또는 $ax+y+c=0$의 꼴일 때는 대입법을 이용하는 것이 편리하다.

3-1

연립방정식 $\begin{cases} kx-(2k+3)y=-1 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$의 해가 일차방정식 $3x+2y=6$을 만족할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

3-2

연립방정식 $\begin{cases} ax-11y=-7 \\ -2ax+9y=-12 \end{cases}$를 만족하는 x와 y의 값의 비가 $5:2$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

3-3

연립방정식 $\begin{cases} (m-4)x+(2-m)y=-1 \\ mx-(m-2)y=-3 \end{cases}$의 해가 $(t,\ 2t)$일 때, 상수 m의 값을 구하여라. (단, t는 상수)

3-4

순서쌍 $(-2,\ 3)$이 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=b \\ cx+y=d \end{cases}$의 해일 때, x에 대한 일차방정식 $b-ax=d-cx$를 풀어라.

(단, a, b, c, d는 상수이고 $a\neq c$이다.)

4 여러 가지 연립방정식의 풀이

1. 괄호가 있는 경우 : 분배법칙을 이용한다.
2. 계수가 분수나 소수인 경우 : 계수를 모두 정수로 고친다.
3. 비례식을 포함한 경우 : 비례식에서 (외항의 곱)=(내항의 곱)임을 이용한다.
4. $A=B=C$의 꼴 : $\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$ 중 가장 간단한 것을 푼다.

4-1

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 0.\dot{3}x+1.\dot{2}y=2.\dot{1} \\ 0.75x-0.5(y+1)=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3y-8}{5}=2 \\ \dfrac{3x-2}{2}-\dfrac{x+y}{3}=-\dfrac{20}{3} \end{cases}$

(3) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{x+y-3}{2}=\dfrac{x-y-2}{5}$

4-2

두 비례식 $(x+1):9=(y+1):8$, $(x+y):(x-y)=5:1$을 만족하는 x, y에 대하여 xy의 값을 구하여라.

4-3

방정식 $4ax+(b-11)y=3(ax-y)-2b=x+3y-6$의 해가 $x=2$, $y=1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

Upgrade

5 분모에 미지수가 들어 있는 연립방정식

분모에 미지수가 들어 있는 분수를 A, B로 치환하여 푼다.

예 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$에서 $\frac{1}{x}=A$, $\frac{1}{y}=B$라 하고

$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=1 \end{cases}$을 푼다.

5-1 ●●○

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}=5 \\ -\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{4}{y}=-\frac{3}{2} \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{5}{2} \end{cases}$

5-2 ●●●

연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=1 \\ \frac{1}{x-y}+\frac{2}{x+y}=7 \end{cases}$의 해가 $x-2y=m$을 만족할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

5-3 ●●●

다음 방정식을 풀어라.

$$\frac{1-3x}{x}+\frac{2y+3}{y}=\frac{x-1}{x}+\frac{1-2y}{y}=3$$

6 연립방정식의 응용

1. 두 연립방정식의 해가 서로 같은 경우 : 네 일차방정식 중 계수에 문자가 없는 두 일차방정식을 연립하여 해를 구한 후, 구한 해를 다른 두 일차방정식에 대입한다.
2. 계수를 잘못 보고 해를 구한 경우 : 잘못 구한 해를 계수를 바르게 본 일차방정식에 대입하여 계수를 구한다.

6-1 ●○○

다음 두 연립방정식의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 3x-y=a \\ x-2y=-3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+ay=b \\ -x+y=a \end{cases}$$

6-2 ●●○

혜림이와 민희가 $\begin{cases} -3x+y=p \\ qx+y=11 \end{cases}$을 푸는데, 혜림이는 p를 잘못 보고 풀어서 $x=3$, $y=5$를, 민희는 q를 잘못 보고 풀어서 $x=1$, $y=4$를 각각 해로 얻었다. 이때 처음 연립방정식의 해를 구하여라. (단, p, q는 상수)

6-3 ●●○

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=10 \\ bx+ay=-14 \end{cases}$를 푸는데 선우는 바르게 풀어서 $x=1$, $y=-3$을 해로 얻었고, 민영이는 a와 b를 바꾸어 놓고 풀어 $x=p$, $y=q$를 해로 얻었다. 이때 $p+q$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

6-4

두 연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ ax-by=6 \end{cases}$ 과 $\begin{cases} bx-ay=-3 \\ x+y=1 \end{cases}$ 의 해가 서로 같다. 이때 $(a+x)(b+y)=-7$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 구하여라. (단, a, b는 상수)

Upgrade

7 미지수가 3개인 연립방정식의 풀이

연립방정식 $\begin{cases} x+y=a & \cdots ㉠ \\ y+z=b & \cdots ㉡ \\ z+x=c & \cdots ㉢ \end{cases}$ 에서

[방법 1] ㉠－㉡을 하면 $x-z=a-b$이므로 이 식을 ㉢과 연립하여 푼다.

[방법 2] ㉠＋㉡＋㉢을 하면 $2(x+y+z)=a+b+c$

즉, $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$ 이므로 이 식에서

㉠, ㉡, ㉢을 각각 빼서 푼다.

7-1

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y-z=4 \\ 3x-3y+z=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$

7-2

다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+y+z=24 \\ (x+y):(y+z):(z+x)=5:10:9 \end{cases}$$

7-3

연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}-\dfrac{1}{y+z}=1 \\ \dfrac{2}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=1 \\ \dfrac{4}{z+x}+\dfrac{3}{x+y}=-3 \end{cases}$ 을 풀어라.

Upgrade

8 연립일차방정식과 식의 값

미지수가 3개인 연립일차방정식이 2개 주어질 때에는 두 미지수를 나머지 하나의 미지수에 대한 식으로 각각 나타낸다.

8-1

연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 6x+y-z=0 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $\dfrac{5x-y+2z}{x+2y+z}$ 의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

8-2

연립방정식 $\begin{cases} 2x+7y-5z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 을 만족하는 세 자연수 x, y, z의 최소공배수가 150일 때, x, y, z의 값을 각각 구하여라.

Upgrade

9 절댓값 기호를 포함하는 연립방정식

1. | | 안을 0이 되게 하는 수를 기준으로 범위를 나누어 푼다.

$$|x-a|=b \Rightarrow \begin{cases} x \geq a\text{일 때, } x-a=b \\ x<a\text{일 때, } -(x-a)=b \end{cases}$$

2. $|x|=a(a>0)$일 때, $x=a$ 또는 $x=-a$임을 이용한다.

9-1

연립방정식 $\begin{cases} |x-2|-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$을 풀어라.

9-2

연립방정식 $\begin{cases} |x|+y=8 \\ |x|-y=4 \end{cases}$의 해를 순서쌍 (x, y)로 나타내어라.

10 해가 특수한 연립방정식

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$에서

(1) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$이면 해는 무수히 많다.

(2) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$이면 해는 없다.

10-1

연립방정식 $\begin{cases} ax-3y=a \\ (a-6)x+6y=a \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

10-2

방정식 $\dfrac{x-5}{4}+\dfrac{7-y}{3}=1$을 만족하는 모든 x, y에 대하여 $ax+by=1$이 성립할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a, b는 상수)

10-3

연립방정식 $\begin{cases} x+ay=5 \\ 2x+4y=5a \end{cases}$는 해가 무수히 많고 방정식 $(b-a+5)x+(b-1)=0$은 해가 없을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

10-4

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=10 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$가 해를 갖지 않도록 하는 10 이하인 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

(단, a, b는 상수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

01

x, y가 정수일 때, 방정식 $x-3y=11$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라. (단, $|x| \le 20$)

02

자연수 a, b, c에 대하여 다음 두 식을 모두 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

$$ac+bc=11, \quad ab+bc=27$$

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

03

a, b, c, d가 유리수일 때, 순서쌍 (a, b), (c, d)에 대하여 연산 $*$을 다음과 같이 약속한다.

$$(a, b) * (c, d) = ac+bc+ad$$

$(1, x) * (y-1, 9) = (y-1, 2) * (x, 2)$를 만족하는 x의 값이 y의 값의 2배일 때, $x+y$의 값을 구하여라.

04

연립방정식 $\begin{cases} 5x+3y=39 \\ mx-y=4 \end{cases}$의 해가 모두 정수일 때, 자연수 m의 값을 구하여라.

05

$\max(x, y)$는 x, y 중에서 작지 않은 것을 나타내고, $\min(x, y)$는 x, y 중에서 크지 않은 것을 나타낼 때, 연립방정식 $\begin{cases} \max(x, y)=3x+2y-5 \\ \min(x, y)=-2x-2y-9 \end{cases}$의 해를 구하여라.

06

연립방정식 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x-ay=a-1 \end{cases}$을 만족하는 x, y의 값이 $x-y=1$을 만족할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

07

두 연립방정식 $\begin{cases} ax-by=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=-1 \end{cases}$과 $\begin{cases} ax+by=5 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \end{cases}$의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $3ab$의 값을 구하여라.

08

연립방정식 $\begin{cases} 5x-2y=-9 \\ -2ax+3y=b-12 \end{cases}$의 해는 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=22 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$의 해보다 x, y의 값이 모두 3만큼씩 크다. 이때 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

09

연립방정식 $\begin{cases} 2x-3xy+2y=23 \\ 6x+xy+6y=9 \end{cases}$를 만족하는 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하여라.

10

다음 식은 네 자리의 자연수끼리 덧셈을 한 것이다. 이 식을 만족하는 한 자리의 자연수 A, B, C의 값을 각각 구하여라.

$$\begin{array}{rcccc} & A & 3 & B & B \\ +) & 4 & 0 & C & B \\ \hline & B & 4 & 1 & A \end{array}$$

11

오른쪽 연립방정식을 만족하는 x, y, z에 대하여 $2x+y+3z$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

12

다음 연립방정식의 해를 구하여라.

(1) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c+d=3 \\ c+d+a=1 \\ d+a+b=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+3y=7 \\ y+3z=11 \\ z+3w=15 \\ w+3x=7 \end{cases}$

13

연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라 할 때, $|a+b-2c|$의 값을 구하여라.

14

$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right):\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right):\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)=5:6:7$일 때, $\dfrac{xy+z^2}{x^2+yz}$의 값을 구하여라.

15

세 순환소수 $x=0.a\dot{b}$, $y=0.b\dot{c}$, $z=0.c\dot{a}$가 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=0.3 \end{cases}$을 만족할 때, abc의 값은?

(단, a, b, c는 9 이하의 자연수이다.)

① 12　② 18　③ 24　④ 32　⑤ 36

16

연립방정식 $\begin{cases} |x|+x+y=9 \\ x+|y|-y=12 \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

17

연립방정식 $\begin{cases} 3x+y=ax \\ x+3y=2ax \end{cases}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위한 상수 a의 값을 구하여라.

18

다음 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

$$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 2x-3y+4z=-a \\ 3x-4y+bz=0 \end{cases}$$

STEP 3 최고 수준 완성하기

● 정답과 해설 p.31

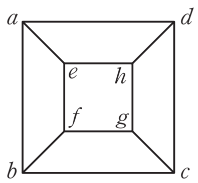
01 자연수 x, y에 대하여 방정식 $|x-3|-2y=2x-6$을 만족하는 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

Tip $|\quad|$ 안을 0이 되게 하는 수를 기준으로 범위를 나눈다.

02 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+2z=8 \end{cases}$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)를 모두 구하여라.

Tip 미지수 하나를 없애 미지수가 2개인 일차방정식을 만든 후, x, y, z가 자연수임을 이용한다.

03 오른쪽 그림과 같이 도형의 각 꼭짓점에 숫자 a, b, c, d, e, f, g, h를 써넣으면 한 꼭짓점에 있는 숫자는 변으로 이어진 인접한 세 꼭짓점에 있는 숫자의 합과 같다. 예를 들어 $a=b+d+e$이고, $f=b+e+g$이다. 이때 $a+b+c+d+e+f+g+h$의 값을 구하여라.



Tip a, b, c, d를 각각 인접한 세 꼭짓점에 있는 숫자의 합으로 나타내어 연립방정식을 만들어 본다.

04 네 수 a, b, c, d 중 세 개씩을 골라 더한 값이 각각 166, 199, 208, 216일 때, 네 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 순서대로 구하여라.

Tip 166, 199, 208, 216을 각각 a, b, c, d의 합으로 나타낸다.

Tip

05 연립방정식 $\begin{cases} 7x^2-3y^2+4z^2=29 \\ 5x^2-2y^2+3z^2=30 \end{cases}$을 만족하는 세 정수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

x, y, z가 정수이면 x^2, y^2, z^2은 제곱수임을 이용한다.

06 연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$를 만족하는 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

(단, $xy\neq0$)

$\begin{cases} x(x+y)=12 \\ y(x+y)=4 \end{cases}$이므로 두 방정식에서 공통된 부분을 없앤다.

07 연립방정식 $\begin{cases} xy+yz=\dfrac{5}{2}zx \\ yz+zx=6xy \\ zx+xy=\dfrac{3}{4}yz \end{cases}$를 만족하는 x, y, z에 대하여

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

각 방정식의 양변을 xyz로 나누어 본다.

08 자연수 a, b에 대하여 연립방정식 $\begin{cases} x-ay+z=0 \\ x-3by+2z=0 \\ x+2aby=0 \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때,

$\dfrac{x^2}{yz}$의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

$x+2aby=0$에서 $x=-2aby$임을 이용하여 x를 없앤다.

2 연립방정식의 활용

1 연립방정식의 활용

연립방정식을 활용하여 문제를 해결하는 단계는 다음과 같다.

① 문제의 상황에 맞게 미지수 x, y를 정한다.
② x, y를 사용하여 문제의 뜻에 맞는 연립방정식을 세운다.
③ 연립방정식을 풀어 x, y의 값을 구한다.
④ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

• 미지수 x, y 정하기
↓
연립방정식 세우기
↓
연립방정식 풀기
↓
확인하기

2 연립방정식의 활용에서 자주 이용되는 관계

1. 수에 대한 문제

자연수, 물건의 개수와 가격, 나이, 인원수 등의 문제

(1) 0 또는 한 자리의 자연수 a, b, c에 대하여
두 자리의 자연수 : $10a+b$ (단, $a\neq0$)
세 자리의 자연수 : $100a+10b+c$ (단, $a\neq0$)

(2) (총 판매 금액)$=$(물건 한 개의 가격)$\times$(수량)

• 물건의 개수, 나이, 인원수는 0 또는 자연수임에 주의한다.

2. 거리, 속력, 시간에 대한 문제

(1) (거리)$=$(속력)$\times$(시간)

(2) (속력)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$

(3) (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

• 거리, 시간 등은 단위를 통일시켜야 한다.
1 km$=$1000 m$=$100000 cm
1시간$=$60분$=$3600초

3. 농도에 대한 문제

(1) (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100(\%)$

(2) (소금의 양)$=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

• 일반적으로 농도는 백분율(%)을 이용하여 나타내지만, 소수로 나타내는 경우도 있다.
예 농도가 10% ⇨ 농도가 0.1

4. 일의 양에 대한 문제

전체 일의 양을 1이라 하고 식을 세운다.

(1) 일을 완성하는 데 n일이 걸릴 때, 하루 동안 하는 일의 양은 $\dfrac{1}{n}$

(2) 물을 채우는 데 n시간이 걸릴 때, 1시간 동안 채울 수 있는 물의 양은 $\dfrac{1}{n}$

5. 증가, 감소에 대한 문제

증가 또는 감소하기 전의 수를 기준으로 식을 세운다.

(1) A가 $x\%$ 증가 : $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$

(2) A가 $x\%$ 감소 : $A\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

STEP 1 유형별 문제 공략하기

정답과 해설 p.32

1 수에 대한 문제

(1) 자연수 : 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 두 자리의 자연수는 $10a+b$
(2) 물건의 개수와 가격
(총 판매 금액)=(물건 한 개의 가격)×(수량)
(3) 나이
나이의 차는 시간이 지나도 같다는 사실을 이용한다.
(4) 개수, 인원수, 횟수
방정식을 세운 후 자연수임을 이용한다.

1-1

어느 문구점에서 민재는 볼펜 5개와 연필 2개를 사서 3600원을 지불했고, 혜정이는 볼펜 1개와 연필 4개를 사서 1800원을 지불했다. 이 문구점에서 파는 볼펜 3개와 연필 2개의 가격의 합을 구하여라.

1-2

어느 회의에서 의제에 대하여 찬성과 반대를 다수결에 의해 결정하였다. 다음은 회의가 끝난 후 A, B 두 사람이 나눈 대화이다. 이 회의에서 기권한 사람은 없다고 할 때, 찬성한 사람의 수와 반대한 사람의 수를 각각 구하여라.

A : 내가 C와 D를 찬성하도록 설득했다면 절반은 찬성한 것인데 아쉽군.
B : 만약 나도 반대했다면 모인 사람의 $\frac{2}{3}$가 반대한 것이군.

1-3

어떤 두 자리의 자연수에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자 사이에 3을 넣어 만든 세 자리의 자연수는 처음 두 자리의 자연수의 15배보다 140이 작다. 이때 처음 두 자리의 자연수를 구하여라.

1-4

내가 나의 아버지의 현재 나이만큼 되었을 때, 나의 나이는 내 아들의 현재 나이의 5배가 될 것이고, 그때의 내 아들의 나이는 나의 현재 나이보다 8살이 많을 것이다. 나의 아버지와 나의 현재 나이를 합하면 100살일 때, 내 아들의 현재 나이는 몇 살인지 구하여라.

1-5

한 개에 각각 200원, 400원, 600원 하는 세 종류의 상품이 있다. 6000원을 가지고 세 종류의 상품 16개를 살 때, 600원짜리를 가능한 많이 사면 최대 M개 살 수 있고, 200원짜리를 가능한 적게 사면 최소 N개 살 수 있다. 이때 $M+N$의 값을 구하여라. (단, 세 종류의 상품을 각각 1개 이상은 사야 하고, 거스름돈은 남지 않는다.)

2 거리, 속력, 시간에 대한 문제

(거리)=(속력)×(시간), (속력)=$\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$, (시간)=$\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

2-1

둘레의 길이가 1.2 km인 운동장을 형과 동생이 같은 지점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 달리면 출발한 지 10분 만에 처음으로 만나고, 서로 반대 방향으로 달리면 출발한 지 4분 만에 처음으로 만난다고 한다. 형이 동생보다 빨리 달린다고 할 때, 형과 동생의 달리는 속력의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

2-2

일정한 속력으로 달리는 기차가 1km 길이의 터널을 완전히 통과하는 데 12초가 걸리고, 460m 길이의 다리를 완전히 통과하는 데 6초가 걸렸다. 이 기차의 속력은?

① 초속 60m ② 초속 70m ③ 초속 80m
④ 초속 90m ⑤ 초속 100m

2-3

지연이는 집에서 학교까지 걸어가는데 평소 걷는 속력보다 시속 0.5km 빠르게 걸으면 평소 걸리는 시간보다 8분이 단축되고, 평소 걷는 속력보다 시속 1km 느리게 걸으면 평소 걸리는 시간보다 40분이 더 걸린다. 이때 집에서 학교까지의 거리를 구하여라.

2-4

A, B, C 세 대의 자동차가 부산에서 출발하여 서울로 가고 있다. B는 C보다 5분 늦게 출발하여 20분 만에 C를 따라잡았고, A는 B보다 10분 늦게 출발하여 50분 만에 C를 따라잡았다. A는 출발 후 몇 분 만에 B를 따라잡을 수 있는지 구하여라.

3 농도에 대한 문제

$$(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100(\%)$$

$$(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$$

참고 소금물에서 물을 증발시키거나 소금물에 물을 더 넣어도 소금의 양은 변하지 않는다.

3-1

11%의 A 소금물과 8%의 B 소금물이 합하여 600g이 있다. A 소금물에서 50g의 물을 증발시키고, B 소금물에 80g의 물을 더 넣은 후, 두 소금물을 섞었더니 10%의 소금물이 되었다. 소금물 A, B의 처음의 양을 각각 구하여라.

3-2

2%의 소금물과 9%의 소금물을 섞은 후 소금과 물을 더 넣어 7%의 소금물 1300g을 만들었다. 더 넣은 소금의 양과 물의 양의 비가 1 : 8이고, 2%의 소금물의 양과 더 넣은 물의 양의 비가 3 : 2일 때, 2%의 소금물의 양을 구하여라.

3-3

농도가 다른 두 소금물 A와 B가 있다. A와 B를 서로 같은 양으로 섞으면 농도가 7%인 소금물이 되고, A와 B를 2 : 1로 섞으면 농도가 6%인 소금물이 된다. 이때 A와 B를 3 : 1로 섞으면 농도가 몇 %인 소금물이 되는지 구하여라.

4 일의 양과 시간에 대한 문제

전체 일의 양을 1이라 하고 단위 시간 동안 할 수 있는 일의 양을 미지수로 놓는다.

예 A, B가 함께 3일 동안 일을 하여 완성하였다.

⇨ A, B가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y라 하면 $3(x+y)=1$

4-1 ●○○

A, B, C가 함께 하면 완성하는 데 3일이 걸리는 일을 A와 C가 함께 하면 6일, B와 C가 함께 하면 4일이 걸린다고 한다. 이때 이 일을 A와 B가 함께 하면 완성하는 데 며칠이 걸리는지 구하여라.

4-2 ●○○

십자수 작품을 만드는데 은지가 하루 동안 작업하는 양은 정희가 하루 동안 작업하는 양의 2.5배이다. 은지와 정희가 3일 동안 함께 작업하고, 은지가 혼자 7일을 더 작업하면 작품 하나를 완성할 수 있다고 한다. 정희가 혼자서 작업하면 작품 하나를 완성하는 데 며칠이 걸리는지 구하여라.

4-3 ●●○

어느 아파트의 물탱크는 두 개의 호스 A, B를 이용하여 물을 채운다. A 호스의 급수량은 B 호스의 급수량의 4배이고 급수하는 동안 주민들은 C 호스를 통하여 일정한 양의 물을 사용한다. 또 빈 물탱크에 A 호스만으로 물을 채우면서 동시에 C 호스를 통하여 일정량의 물을 계속 사용하면 물탱크에 물이 가득 차는 데 5분이 걸리고, B 호스만으로 물을 채우면서 동시에 C 호스를 통하여 일정량의 물을 계속 사용하면 물탱크에 물이 가득 차는 데 25분이 걸린다고 한다. 이때 물탱크에 물을 가득 채운 상태에서 물을 보충하지 않고 C 호스를 통하여 일정량의 물을 몇 분간 계속 사용할 수 있는지 구하여라.

5 증가, 감소 / 원가, 정가에 대한 문제

1. 증가, 감소

(1) A가 $x\,\%$ 증가 : $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$

(2) A가 $x\,\%$ 감소 : $A\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

2. 원가, 정가

(1) A원에 $x\,\%$ 이익을 붙인 정가 : $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$원

(2) A원을 $x\,\%$ 할인한 판매가 : $A\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$원

5-1 ●○○

어느 학교의 작년의 학생 수가 500명이었는데 올해는 남학생 수가 4 % 감소하고, 여학생 수가 6 % 증가하여 작년에 비해 전체 학생 수가 1 % 감소하였다. 이때 올해의 남학생 수와 여학생 수를 각각 구하여라.

5-2 ●●○

여행을 가는데 1인 기준으로 작년에 비해 숙박비는 15 % 내렸고, 비행기 요금은 20 % 올라서 올해의 숙박비와 비행기 요금의 합계는 작년보다 10 % 증가한 금액인 231000원이라고 한다. 이때 올해의 숙박비와 비행기 요금을 1인 기준으로 각각 구하여라.

5-3 ●●○

어느 가게에서 A, B 두 상품을 합하여 34000원에 사서 A 상품은 원가의 6 %, B 상품은 원가의 10 %의 이익을 붙여 정가를 정하였다. 그런데 물건이 팔리지 않아 B 상품은 정가를 4 % 할인한 가격에 팔았더니 두 상품을 합하여 1940원의 이익이 생겼다. A, B 두 상품의 원가를 각각 구하여라.

● 정답과 해설 p.35

01

수련회에 가서 학생들에게 방을 배정하는데 한 방에 7명씩 배정하면 24명이 남는다. 그래서 한 방에 8명 또는 9명을 배정하였더니 8명씩 배정한 방 수와 9명씩 배정한 방 수의 비가 2 : 1이 되었다. 이때 전체 학생 수와 방 수를 각각 구하여라.

02

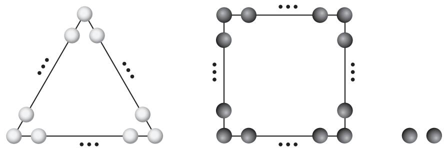
세 자리의 자연수가 있다. 이 자연수에서 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 18이 커지고, 처음 수에서 백의 자리와 십의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 90이 커진다. 이때 처음 수에서 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 얼마만큼 커지는지 구하여라.

03

30명을 뽑는 시험에 50명이 응시하였는데 최저 합격 점수는 응시생 50명의 성적의 평균보다 1점이 높고, 합격한 응시생 성적의 평균보다 5점이 낮았다. 또 불합격한 응시생 성적의 평균의 3배는 합격한 응시생 성적의 평균의 2배보다 50점이 높았다. 이때 최저 합격 점수를 구하여라.

04

흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 합하여 75개의 바둑돌이 있다. 다음 그림과 같이 흰 바둑돌로는 정삼각형 모양을, 검은 바둑돌로는 정사각형 모양을 만들었더니 검은 바둑돌만 2개 남았다. 정삼각형의 한 변에 놓인 바둑돌의 개수가 정사각형의 한 변에 놓인 바둑돌의 개수의 2배일 때, 흰 바둑돌의 개수와 검은 바둑돌의 개수를 각각 구하여라.



05

A, B, C 세 명의 나이가 다음 조건을 모두 만족할 때, A와 B의 나이의 차를 구하여라.

> **조건**
> (가) A의 나이는 35살 이하로 3명 중 나이가 가장 많고, B는 10살 이상, C는 10살 미만이다.
> (나) A의 나이와 그 나이의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수의 차에 C의 나이를 더하면 63이 된다.
> (다) B의 나이와 그 나이의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수의 차에서 C의 나이를 빼면 63이 된다.

06

다음은 어느 학교 수행평가 20문항에 대한 각 문항당 채점 기준표이다.

	기본 점수	풀이 과정과 답이 모두 맞은 경우	답만 맞은 경우	답이 틀린 경우
올해	없음	5점	2점	없음
작년	20점	4점	없음	−1점

어느 학생의 올해 수행평가 점수는 63점이고 이를 작년의 채점 기준으로 하면 59점이다. 이때 이 학생이 답만 맞힌 문항의 수를 구하여라.

07

다음은 통신회사 A, B, C의 요금제이다.

- A회사 : 기본 요금 없이 분당 200원
- B회사 : 120분까지 기본 요금, 초과 시 초과분에 한하여 분당 80원의 추가 요금
- C회사 : 45분까지 기본 요금, 초과 시 초과분에 한하여 사용 시간에 비례하여 분당 추가 요금 부과

165분 통화하면 A, C회사의 요금이 같고, 245분 통화하면 B, C회사의 요금이 같다. B와 C회사의 기본 요금이 같을 때, A, B회사의 요금이 같게 나오는 것은 몇 분 통화했을 때인지 구하여라.

08

물고기 50마리를 다섯 마리 한 묶음에 1000원, 세 마리 한 묶음에 700원, 낱개로 한 마리에 300원을 받고 모두 팔았더니 받은 돈이 10700원이 되었다. 이때 다섯 마리 묶음 수, 세 마리 묶음 수와 낱개로 판 물고기의 수를 각각 구하여라.

09

어느 자선 음악회의 입장권 150장을 402000원에 모두 팔았는데 일부는 정가로 팔았지만 나머지는 20 % 할인한 가격에 팔았다. 정가를 $1000n$원이라 할 때, 정가로 판 입장권은 모두 몇 장인지 구하여라. (단, n은 자연수)

10

종혁이는 배 한 개의 가격이 1830원, 사과 한 개의 가격이 1560원, 감 한 개의 가격이 650원인 과일 가게에서 배, 사과, 감을 섞어서 37000원어치 샀다. 배를 10개 이하로 샀다고 할 때, 종혁이가 산 배의 개수를 구하여라.

11

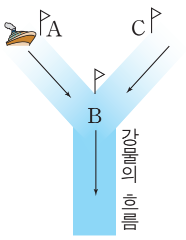
넓이가 $2\,km^2$인 목장에 9마리의 소를 풀어 놓으면 16일 만에 목장의 풀을 모두 먹고, 넓이가 $3\,km^2$인 목장에 18마리의 소를 풀어 놓으면 10일 만에 목장의 풀을 모두 먹는다. 목장의 단위 넓이당 원래 있던 풀의 양은 모두 같고 방목 이후 하루에 자라나는 풀의 양과 소 한 마리가 하루에 먹는 풀의 양은 일정하다고 할 때, 넓이가 $5\,km^2$인 목장에 35마리의 소를 풀어 놓으면 며칠 만에 목장의 풀을 모두 먹을지 구하여라.

12

학교에서 13 km 떨어진 체육관으로 가는데 두 모둠으로 나누어서 1모둠은 시속 4 km의 속력으로 걸어가고, 2모둠은 1모둠과 같은 지점에서 동시에 출발하여 버스를 타고 시속 40 km의 속력으로 갔다. 중간 A지점에서 2모둠은 버스에서 내려서 걸어가고 버스는 바로 되돌아가 걸어오던 1모둠을 태우고 가서 1모둠과 2모둠이 동시에 체육관에 도착하였다. 이때 1모둠이 걸은 거리를 구하여라. (단, 두 모둠이 걷는 속력은 같고, 버스의 속력은 일정하며 버스를 타고 내리는 데 걸린 시간은 무시한다.)

13

다음 그림과 같이 2개의 강이 B지점에서 만나고 있다.



흐르지 않는 강물 위에서 1시간에 10 km를 가는 배가 강의 A지점에서 출발하여 하류의 B지점을 지나 상류의 C지점까지 갔다가, 다시 B지점를 지나 A지점으로 돌아왔다. 돌아올 때는 갈 때보다 20분이 더 걸렸고, 강물은 두 지점 A, B 사이에서는 시속 4 km, 두 지점 C, B 사이에서는 시속 5 km의 속력으로 흐른다. A지점에서 B지점을 지나 C지점까지 가는 거리와 똑같은 거리를 흐르지 않는 물 위로 가면 2시간 45분이 걸린다고 할 때, 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(단, 강의 폭은 고려하지 않는다.)

14

농도가 다른 소금물이 들어 있는 두 그릇 A, B에서 같은 양의 소금물을 퍼내어 섞은 후 소금과 물의 양의 비를 조사했더니 1 : 4이었고, A그릇에서 처음 퍼낸 양의 2배의 소금물을 퍼내어 여기에 다시 섞은 후 소금과 물의 양의 비를 조사했더니 1 : 3이었다. 이때 처음 B그릇에 들어 있는 소금과 물의 양의 비를 구하여라.

15

A비커에는 알콜과 물이 7 : 1의 비율로 섞여 있고, B비커에는 알콜과 물이 9 : 1의 비율로 섞여 있다. A비커에서 따라낸 액체와 B비커에서 따라낸 액체를 섞어서 알콜과 물의 비율이 8 : 1인 40 L의 액체를 만들 때, A, B 두 비커에서 따라낸 액체의 양을 각각 구하여라.

16

A, B, C 세 개의 수도꼭지가 달려 있는 어항에 물을 가득 채우는데 A와 B를 동시에 틀면 p분, B와 C를 동시에 틀면 q분, C와 A를 동시에 틀면 r분이 걸린다고 한다. 어항에 물을 가득 채울 때, 세 수도꼭지 A, B, C를 동시에 틀면 몇 분이 걸리겠는가?

① $(p+q+r)$분
② $\dfrac{pq+qr+rp}{2pqr}$분
③ $\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$분
④ $\dfrac{p+q+r}{pq+qr+rp}$분
⑤ $\dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$분

STEP 3 최고 수준 완성하기

● 정답과 해설 p.37

Tip

01 동아리 회원이 모두 참석한 모임에서 남학생과 여학생이 각각 자신을 제외한 회원 수를 세어 보고 나서 여학생은 "우리 동아리 회원의 $\frac{12}{17}$는 여자야."라고 했고, 남학생은 "아니야. 우리 동아리 회원의 $\frac{5}{7}$가 여자야."라고 했다. 두 사람의 말이 모두 옳을 때, 이 동아리의 여자 회원 수와 남자 회원 수를 각각 구하여라.

> 동아리의 여자, 남자 회원 수를 미지수로 놓고 방정식을 세운다.

02 어느 회사에서는 직원들에게 차례로 번호를 부여한 후 다음과 같은 방법으로 보너스를 지급하였다.

> 1번에게는 전체 보너스 중 10만 원을 준 후, 그 나머지의 $\frac{1}{20}$을 주었다.
> 2번에게는 남은 돈에서 20만 원을 준 후, 그 나머지의 $\frac{1}{20}$을 주었다.
> 같은 방법으로 n번에게는 $(n-1)$번까지 주고 남은 돈에서 $n\times10$만 원을 준 후, 그 나머지의 $\frac{1}{20}$을 주었다.

보너스 지급이 끝나고 확인하니 각 직원이 받은 보너스 금액이 모두 같았다고 한다. 이 회사에 근무하는 직원 수를 구하여라.

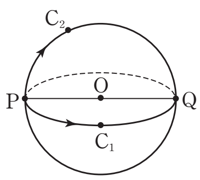
> 각 직원이 받은 금액과 전체 보너스의 총액을 미지수로 놓고, 1번이 받는 보너스부터 차례로 식을 세워 본다.

03 어느 가게에서는 800원짜리, 2100원짜리, 3200원짜리의 세 종류의 우유를 파는데 고객 한 명당 한 가지 종류의 우유만을 살 수 있다고 한다. 어느 날 이 가게의 우유 매출액이 14400원일 때, 다음 중 우유를 사간 고객의 수가 아닌 것은?

① 6명 ② 9명 ③ 12명 ④ 14명 ⑤ 18명

> 세 종류의 우유를 산 고객의 수를 미지수로 놓고 매출액에 대한 식을 세운 후, 고객의 수는 0 이상의 정수임을 이용한다.

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 구 O가 있다. 두 마리의 개미가 점 P에서 동시에 출발하여 구의 단면 중 가장 큰 원의 둘레를 따라 각각 C_1, C_2의 방향으로 매분 50 cm, 매분 70 cm의 속력으로 움직이면 10분 후에 처음으로 점 Q에서 만난다고 한다. 이때 이 구의 반지름의 길이를 구하여라.



> 개미가 점 Q에 위치했을 때의 움직인 거리를 생각해 본다.

Tip

05 백설공주는 14명의 난쟁이를 위해 모자 14개, 목도리 14개, 양말 14켤레를 짰는데 모두 빨간색 또는 초록색 중 한 가지의 털실을 사용해서 짰다. 일을 마치고 돌아온 난쟁이들이 기뻐하며 몸에 걸쳐 보았을 때, 다음과 같은 모습이었다고 한다.

> (가) 어느 난쟁이를 보아도 모자와 양말은 다른 색이다.
> (나) 빨간색 목도리와 빨간색 양말의 난쟁이 수와 초록색 목도리와 초록색 양말의 난쟁이의 수의 합은 8명이다.
> (다) 빨간색 모자를 쓰고 있는 난쟁이는 7명이다.
> (라) 모자, 목도리, 양말 중 1가지만 빨간색을 몸에 걸친 난쟁이는 9명이다.

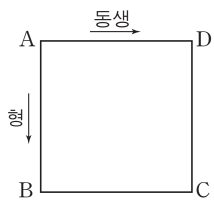
이때 양말만 빨간색인 난쟁이는 몇 명인지 구하여라.

조건에 맞는 모자, 목도리, 양말의 세트를 표로 정리한 후, 미지수를 정한다.

06 철로를 따라서 시속 3 km로 걷고 있던 지윤이는 같은 방향으로 가는 열차에 20분마다 추월을 당했고, 반대 방향에서 오는 열차와 10분마다 마주쳤다. 모든 열차는 일정한 속력으로 달리고 열차가 지나가는 간격도 같다. 열차의 속력을 시속 x km, 열차와 열차 사이의 거리를 y km라 할 때, x, y의 값을 각각 구하여라.

열차가 같은 방향으로 갈 때와 반대 방향으로 갈 때의 열차가 자나가는 간격, 즉 거리에 대해 식을 세운다.

07 둘레의 길이가 1200 m인 정사각형 모양의 운동장이 있다. 형과 동생이 동시에 점 A를 출발하여 일정한 속력으로 형은 A→B→C→D→A→⋯의 방향으로, 동생은 A→D→C→B→A→⋯의 방향으로 돌고 있다. 형과 동생은 변 BC 위에서 점 C로부터 108 m 떨어진 지점에서 최초로 만났고, 변 AD 위에서 점 D로부터 72 m 떨어진 지점에서 두 번째로 만났다. 형과 동생은 정사각형의 각 꼭짓점에서 10초씩 쉰다고 할 때, 두 사람이 세 번째로 만나는 지점을 구하여라. (단, 가까운 꼭짓점을 기준으로 답하여라.)



형과 동생의 속력을 미지수로 놓고, $(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$를 이용하여 형과 동생이 만날 때마다 걸리는 시간에 대한 식을 세운다.

퍼펙트 단원 마무리

정답과 해설 p.39

01

방정식 $x+3y+5z=12$를 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$를 모두 구하여라.

02

다음 보기 중 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=a+2 \\ 2x+y=3a+6 \end{cases}$의 해에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라. (단, a는 상수)

보기

ㄱ. $a=1$이면 해가 없다.

ㄴ. $a\neq-2$이면 $x=4$, $y=3a-2$이다.

ㄷ. $a=-2$이면 해가 무수히 많다.

03

세 방정식 $xy=z$, $yz=x$, $zx=y$를 모두 만족하는 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

(단, $xyz\neq0$)

04

연립방정식 $\begin{cases} 18x-24y+7z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$을 만족하는 세 자연수 x, y, z의 최소공배수가 240일 때, $x+y+z$의 값을 구하여라.

05

연립방정식 $\begin{cases} px+qy=5 \\ rx+sy=7 \end{cases}$을 A, B, C 세 사람이 각각 푸는데 A는 바르게 풀어서 $x=3$, $y=4$를 얻었고, B는 r를 잘못 보고 풀어서 $x=5$, $y=5$를, C는 p를 잘못 보고 풀어서 $x=1$, $y=-1$을 각각 얻었다. 이때 네 상수 p, q, r, s의 값을 각각 구하여라.

06

연립방정식 $\begin{cases} 3xy-x-y=0 \\ 5yz-y-z=0 \\ 6xz-x-z=0 \end{cases}$을 만족하는 x, y, z에 대하여 $\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}$의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

07

연립방정식 $\begin{cases} |x|+x+y=10 \\ |x+y|-y=15 \end{cases}$를 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

08

다음 연립방정식의 해가 무수히 많이 존재하기 위한 상수 m, n의 값을 각각 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=n \\ x+4y+mz=10 \end{cases}$$

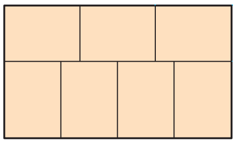
09

다음 표와 같이 홀수들을 배열하고 그 중에서 $\begin{matrix} a & b & \\ & c & d \end{matrix}$ 의 모양으로 4개의 수를 택하여 모두 더했더니 그 값이 852였다. 네 수 중 가장 작은 수를 x, 가장 큰 수를 y라 하고, 네 수를 구하기 위한 연립방정식을 세우면 $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$ 일 때, A, B의 값을 각각 구하여라.

1	11	21	31	41	…
3	13	23	33	43	…
5	15	25	35	45	…
7	17	27	37	47	…
9	19	29	39	49	…

10 | 자사고 기출 유사 |

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 직사각형 모양의 타일 7장을 겹치지 않게 빈틈없이 붙여 큰 직사각형 모양을 만들었더니 그 둘레의 길이가 114 cm가 되었다. 이때 직사각형 모양의 타일 한 장의 넓이를 구하여라.



11

같은 종류의 만화책 A권과 만화책보다 두꺼운 같은 종류의 소설책 B권으로 가득 차 있는 책꽂이가 있다. 이 책꽂이는 만화책 C권, 소설책 D권을 꽂아도 가득 채워지고, 만화책 E권만으로도 가득 채워진다고 한다. A, B, C, D, E는 모두 자연수일 때, 다음 중 E를 A, B, C, D에 관한 식으로 나타낸 것은? (단, $A\neq C$, $B\neq D$)

① $\dfrac{AB+CD}{B+D}$ ② $\dfrac{AB^2+CD^2}{B^2+D^2}$ ③ $\dfrac{BC-AD}{B-D}$

④ $\dfrac{AB-CD}{B-D}$ ⑤ $\dfrac{AB^2-CD^2}{B^2-D^2}$

12

가정용 상수도의 1개월 요금은 다음과 같다.

- $10\,\mathrm{m}^3$까지는 기본 요금 a원
- $10\,\mathrm{m}^3$를 넘으면 넘어간 양에 한하여 $1\,\mathrm{m}^3$당 b원의 초과 요금과 기본 요금의 합
- $30\,\mathrm{m}^3$를 넘으면 넘어간 양에 한하여 $1\,\mathrm{m}^3$당 $2b$원의 초과 요금과 $30\,\mathrm{m}^3$일 때의 요금의 합

어떤 가정에서 5월에는 $25\,\mathrm{m}^3$을 사용하여 2430원의 상수도 요금을 내고, 6월에는 $40\,\mathrm{m}^3$을 사용하여 5180원의 상수도 요금을 냈다. 이때 a, b의 값을 각각 구하여라.

13 | 과고 기출 유사 |

어느 회사의 입사 시험에 20대 중반 30명, 20대 후반 40명, 30대 초반 50명이 지원하였다. 입사 시험 점수를 확인해 보니 20대 후반의 평균은 20대 중반의 평균보다 10점이 높고, 30대 초반의 평균은 20대 후반의 평균보다 15점이 높고 20대 중반의 평균의 1.5배이었다. 이때 지원자 전체의 평균 점수를 구하여라.

14

2000년 식목일에 A, B 두 종류의 묘목을 각각 x그루, y그루 심었다. 2000년에 묘목의 길이는 모두 1 m이었고, 1년에 A는 10 cm씩, B는 20 cm씩 커진다. 다음과 같은 규칙으로 매년 식목일에 묘목을 심었더니 2004년 식목일에 키가 140 cm인 나무가 140그루, 2008년 식목일에 키가 160 cm인 나무가 330그루였다. 이때 2010년 식목일에 키가 2 m 이상인 나무는 모두 몇 그루인지 구하여라.

> 2001년에 묘목 A, B를 각각 $2x$그루, $2y$그루 심는다.
> 2002년에 묘목 A, B를 각각 $3x$그루, $3y$그루 심는다.
> ⋮
> $(2000+n)$년에 묘목 A, B를 각각 $(n+1)x$그루, $(n+1)y$그루 심는다.

15

강에서 배를 타고 한 지점에서 낚시를 하다가 오후 3시에 강물을 거슬러 상류로 올라가기 시작했다. 30분이 지났을 때, 출발 직전에 강물에 빠뜨린 낚싯대를 건지러 배를 돌려 강물을 따라 내려갔다. 한참을 내려가다 강물을 따라 떠내려가고 있는 낚싯대를 건졌다. 강물의 속력은 시속 2 km이고, 정지한 물에서의 배의 속력은 시속 5 km일 때, 낚싯대를 건져 올린 시각을 구하여라.

(단, 배를 돌리는 데 걸린 시간은 생각하지 않는다.)

16

서로 반대 방향에 위치한 두 도시 P, Q에 각각 은영이와 민서가 살고 있다. 은영이는 Q도시를 향해, 민서는 P도시를 향해 동시에 자전거를 타고 출발하였는데, 중간에 위치한 휴게소에서 둘이 만났을 때 은영이는 민서보다 10 km를 더 이동했다는 것을 알게 되었다. 두 사람은 휴게소에서 동시에 출발한 후 은영이는 1시간 만에 Q도시에, 민서는 4시간 만에 P도시에 도착하였다. 이때 두 도시 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

(단, 두 사람이 이동하는 속력은 각각 일정하다.)

17

구리와 아연으로만 이루어진 두 합금 A, B가 있다. 합금 A는 구리와 아연을 같은 비율로 포함한 합금이고, 합금 B는 구리와 아연을 3 : 1의 비율로 포함한 합금이다. 이 두 종류의 합금을 녹여서 구리와 아연을 2 : 1의 비율로 포함한 합금 390 g을 만들려고 한다. 이때 필요한 두 합금 A, B의 양을 각각 구하여라.

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기

1 3세기경 중국에서 만들어진 "손자산경"이라는 책에는 다음과 같은 문제와 그 풀이가 실려 있다. 당시에는 문자를 사용할 수 없어 풀이 과정은 일상적인 문장으로 표현되었다.

> 토끼와 꿩이 바구니에 있다. 위를 보니 머리의 수가 35, 아래를 보니 다리의 수가 94이다. 토끼와 꿩은 각각 몇 마리인가?
>
> 다리의 수를 반으로 나누어라.
> 그 값에서 머리의 수를 빼라. 이것이 토끼의 수이다.
> 머리의 수에서 토끼의 수를 빼라. 이것이 꿩의 수이다.

(1) 위 글에서 제시한 풀이 순서에 따라 토끼와 꿩의 수를 각각 구하여라.

(2) (1)의 풀이 순서대로 하면 토끼와 꿩의 수를 구할 수 있음을 문자를 사용하여 논리적으로 설명하여라.

답안 작성

출제 의도 주어진 글을 읽은 후, 그 의미를 이해하고 문자를 사용한 식으로 설명할 수 있는가를 묻는 문제이다. 일상적인 문장으로 서술된 풀이 과정을 문자를 사용한 식으로 나타내어 보고 연립방정식의 풀이 방법 중 하나인 가감법의 원리를 이해하도록 한다.

● 정답과 해설 p.41

2

배낭여행으로 자주 가는 국가 중 일본, 중국, 미국, 프랑스, 호주의 환율과 물가는 각각 다음 표와 같다.

국가	일본	중국	미국	프랑스	호주
환율	100엔 ⇨ 1200원	10위안 ⇨ 1900원	1달러 ⇨ 1200원	1유로 ⇨ 1500원	1호주달러 ⇨ 1100원
평균 식비(1식)	707엔	30위안	10.25달러	6.6유로	9호주달러
평균 관광비(1일)	2329엔	140위안	37달러	15.8유로	31호주달러

각 국가별 항공권을 비롯하여 교통비와 숙박비를 지원해주는 이벤트에 당첨되었다고 할 때, 총 50만 원의 개인 비용으로 식비와 관광비를 사용하면서 8일 동안 위의 국가 중 2개의 국가를 여행하는 자신만의 여행 계획을 세우고 설명하여라. (단, 각 나라별 이동 시간은 무시하며 식비는 1일 3식을 기준으로 하고, 개인 비용은 남는 금액 없이 모두 사용한다.)

답안 작성

출제 의도

주어진 각 나라별 환율과 여행 비용을 보고 연립방정식을 이용하여 여행 계획을 세울 수 있는가를 묻는 문제이다. 두 나라를 선택하는 것은 여러 가지 경우가 있으므로 다양한 여행 계획을 세울 수 있으나 이를 수학적인 모순이 없도록 논리적으로 설명하는 것이 중요하다.

• 신기한 연립방정식의 풀이

우리는 이미 가감법과 대입법을 이용하여 연립방정식을 풀어 보았다.
지금부터는 가감법의 또 다른 형태인 '가우스 소거법'을 이용하여 연립방정식의 해를 구해 보자.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2y-8z=8 \\ -4x+5y+9z=-9 \end{cases}$ 의 해를 구하기 위해서는 각 항의 계수를 x, y, z의 순서대로 적고 등호의 위치에 점선을, 그 오른쪽에 상수항을 적어서 다음과 같은 방법으로 한다.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{A}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{B}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{C}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{D}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

A : 첫 번째 줄에 4배하여 세 번째 줄에 더한다. ⇨ 첫 번째 줄의 첫째 자리에 1을 남기고 아래의 두 값을 0으로 만든다.

B : 두 번째 줄에 $\frac{1}{2}$을 곱한다.

C : 두 번째 줄에 2배, 3배하여 각각 첫 번째 줄, 세 번째 줄에 더한다.

⇨ 두 번째 줄의 둘째 자리에 1을 남기고 위와 아래의 두 값을 0으로 만든다.

D : 세 번째 줄에 7배, 4배하여 각각 첫 번째, 두 번째 줄에 더한다. ⇨ 같은 방법으로 세 번째 줄의 셋째 자리에 1을 남기고 위의 두 값을 0으로 만든다.

따라서 연립방정식의 해는 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$에서 $x=29$, $y=16$, $z=3$이다.

이와 같이 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$의 형태처럼 대각선에는 1, 나머지에는 모두 0이 되도록 만들어 주면 아무리 많은 문자를 포함한 연립방정식의 해도 쉽게 구할 수 있다.

III

부등식

1 일차부등식과 연립부등식

III 부등식

1 부등식과 그 해

1. 부등식 : 부등호를 사용하여 수 또는 식 사이의 대소 관계를 나타낸 식

2. 부등식의 해 : 부등식을 참이 되게 하는 미지수의 값 또는 범위를 부등식의 해라고 하며, 부등식의 해를 모두 구하는 것을 부등식을 푼다고 한다.

• $x-1>2$
좌변 우변
양변

2 부등식의 성질

1. 부등식의 성질 : 부등식의 양변에

(1) 같은 수를 더하거나 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

(2) 같은 양수를 곱하거나 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

(3) 같은 음수를 곱하거나 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

Up grade

2. 부등식의 사칙연산 : $a<x<b$이고 $c<y<d$이면

(1) $a+c<x+y<b+d$　　(2) $a-d<x-y<b-c$

$a,\ b,\ c,\ d$가 모두 양수일 때

(3) $ac<xy<bd$　　(4) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{b}{c}$

• (1) $a<b$이면
$a+c<b+c,\ a-c<b-c$
(2) $a<b,\ c>0$이면
$ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$
(3) $a<b,\ c<0$이면
$ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

참고 부등식의 성질은 부등호 '$\leq$'에 대해서도 성립한다.

• $0<a<b$이면 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$
$a>1$이면 $0<\dfrac{1}{a}<1$

3 일차부등식과 그 풀이

1. 일차부등식 : 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 다음 중 어느 하나의 꼴로 나타나는 부등식

(일차식)<0, (일차식)>0, (일차식)≤ 0, (일차식)≥ 0

2. 일차부등식의 풀이

(1) 괄호가 있으면 먼저 괄호를 풀어 간단히 하고, 계수가 분수나 소수이면 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 고친다.

(2) 미지수 x를 포함한 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한다.

(3) 정리하여 $ax<b,\ ax>b,\ ax\leq b,\ ax\geq b$ 중 하나의 꼴로 만든다. (단, $a\neq 0$)

(4) 양변을 x의 계수 a로 나눈다. 이때 a가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

Up grade

3. 해가 특수한 부등식 : $ax<b$에서

(1) $a=0$이고 $b>0$ ⇨ 해는 모든 수

(2) $a=0$이고 $b\leq 0$ ⇨ 해는 없다.

4. 절댓값 기호를 포함하는 부등식

$|A|$가 주어지면 $A\geq 0$일 때와 $A<0$일 때로 나누어 푼다.

5. 가우스 기호를 포함하는 부등식

$[x]$를 x보다 크지 않은 최대의 정수라 할 때,

$[x]=n$ (단, n은 정수) ⇨ $n\leq x<n+1$

예 $[x]=2$ ⇨ $2\leq x<3$, $[x]=-3$ ⇨ $-3\leq x<-2$

• 예 $0\times x<1$을 만족하는 해는 모든 수이다.
$0\times x<-2$를 만족하는 해는 없다.

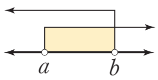
4 연립부등식과 그 풀이

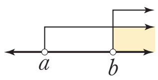
1. **연립부등식** : 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것

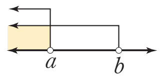
2. **연립부등식의 해** : 연립부등식에서 각 부등식의 공통의 해를 연립부등식의 해라고 하며, 연립부등식의 해를 구하는 것을 연립부등식을 푼다고 한다.

3. **연립부등식의 풀이** : 연립부등식을 이루는 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 그 공통부분을 구한다. 즉, $a<b$에 대하여

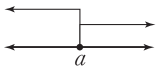
① $\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$ ⇨ $a<x<b$ ② $\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$ ⇨ $x>b$ ③ $\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$ ⇨ $x<a$

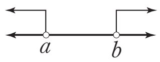






④ $\begin{cases} x\le a \\ x\ge a \end{cases}$ ⇨ $x=a$ ⑤ $\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$ ⇨ 해가 없다.





4. **$A<B<C$ 꼴의 부등식** : 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다.

• $A<B<C$를 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$로 풀지 않도록 주의한다.

예 부등식 $5x-6\le 2x-3<3x+2$를 연립부등식 $\begin{cases} 5x-6\le 2x-3 & \cdots ㉠ \\ 2x-3<3x+2 & \cdots ㉡ \end{cases}$로

고쳐서 풀면 ㉠에서 $x\le 1$, ㉡에서 $x>-5$이므로

부등식 $5x-6\le 2x-3<3x+2$의 해는 $-5<x\le 1$이다.

Upgrade 집중연구

■ 부등식의 사칙연산

$a<x<b$이고 $c<y<d$이면

(1) $a+c<x+y<b+d$ (2) $a-d<x-y<b-c$

확인 (2) $c<y<d$이면 $-d<-y<-c$이므로 $a<x<b$와 각 변끼리 더하면 (1)에 의해

$a+(-d)<x+(-y)<b+(-c)$가 성립한다. $\therefore a-d<x-y<b-c$

a, b, c, d가 모두 양수일 때

(3) $ac<xy<bd$ (4) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{b}{c}$

확인 (4) $c<y<d$이면 $\dfrac{1}{d}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{c}$이므로 $a<x<b$와 각 변끼리 곱하면 (3)에 의해

$a\times\dfrac{1}{d}<x\times\dfrac{1}{y}<b\times\dfrac{1}{c}$이 성립한다. $\therefore \dfrac{a}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{b}{c}$

■ 절댓값 기호를 포함하는 부등식

절댓값 기호를 포함하는 부등식은 범위를 나누어서 푼다.

(1) $|ax|<b$ (단, $b>0$) ⇨ $ax<b$ 그리고 $ax>-b$ ⇨ $-b<ax<b$

(2) $|ax|>b$ (단, $b>0$) ⇨ $ax>b$ 또는 $ax<-b$

정답과 해설 p.42

1 부등식의 성질

(1) $a<b$이면 $a+c<b+c$, $a-c<b-c$

(2) $a<b$, $c>0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

(3) $a<b$, $c<0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(4) $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

1-1

다음 중 옳지 않은 것은?

① $0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>1$

② $a<b$이면 $a\div(-2)>b\div(-2)$

③ $-2a>-2b$이면 $a-(-1)>b-(-1)$

④ $\frac{1}{3}a>\frac{1}{3}b$이면 $-3+\frac{a}{2}>-3+\frac{b}{2}$

⑤ $-3+2a<-3+2b$이면 $-2a-1>-2b-1$

1-2

$a<0$, $b>0$, $a+b<0$일 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $3a<3b$	ㄴ. $a-b<0$
ㄷ. $-\frac{a}{2}<-\frac{b}{2}$	ㄹ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
ㅁ. $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$	ㅂ. $-\lvert a\rvert>-\lvert b\rvert$
ㅅ. $ab>0$	ㅇ. $a^2>b^2$

1-3

다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $a>b$이면 $a^2>b^2$이다.

② $a>b$이고 $c>d$이면 $a+c>b+d$이다.

③ $a<0$, $b<0$일 때, $a^2>b^2$이면 $a<b$이다.

④ $ac>bc$이면 $a>b$이다.

⑤ $b<a<0$, $d<c<0$이면 $ac<bd$이다.

2 부등식의 성질을 이용하여 식의 값의 범위 구하기

$p<x<q$일 때, $ax+b$의 값의 범위 구하기

① $p<x<q$의 각 변에 a를 곱하여 x의 계수를 같게 만든다.

② ①에서 구한 식의 각 변에 b를 더하여 상수항을 같게 만든다.

예 $1\le x<3$일 때, $2x-3$의 값의 범위 구하기

$1\le x<3$
$2\le 2x<6$ (각 변에 2를 곱한다.)
$-1\le 2x-3<3$ (각 변에서 3을 뺀다.)

2-1

$-5\le x<3$일 때, $A=-3x+8$의 값의 범위는 $a<A\le b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

2-2

$1<\frac{x-2}{3}<4$일 때, 다음 중 $\frac{6-x}{2}$의 값이 될 수 없는 것은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

2-3

$x-1.3$을 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하면 2.7일 때, $-2x+5$의 최댓값을 구하여라.

Upgrade

3 부등식의 사칙연산

$a<x<b$, $c<y<d$일 때

(1) $a+c<x+y<b+d$, $a-d<x-y<b-c$

(2) ac, ad, bc, bd 중에서 (최솟값)$<xy<$(최댓값)

(3) $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$ 중에서 (단, $cd\neq0$)

(최솟값)$<\frac{x}{y}<$(최댓값)

3-1 ●●○

$-2<\frac{x}{4}<1$, $-\frac{1}{2}<3y<\frac{3}{2}$일 때, $x-\frac{y}{2}$의 값의 범위를 구하여라.

3-2 ●●○

$-2\le a<1$, $\frac{1}{2}<b\le1$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $-\frac{3}{2}<a+b<-1$ ② $-3\le a-b<\frac{1}{2}$

③ $-2\le ab<\frac{1}{2}$ ④ $-4<\frac{a}{b}<1$

⑤ $1<a^2\le4$

3-3 ●●○

두 부등식 $2\le x+y\le8$, $4\le x-y\le10$을 만족하는 x의 최솟값을 구하여라.

4 일차부등식의 풀이

1. 괄호가 있는 경우 : 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 간단히 정리한다.
2. 계수가 소수인 경우 : 양변에 10, 100, …을 곱한다.
3. 계수가 분수인 경우 : 양변에 분모의 최소공배수를 곱한다.

4-1 ●○○

일차부등식 $0.7x-1.3<\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$의 해가 $x>a$일 때, $a^2-\frac{8}{a}$의 값을 구하여라.

4-2 ●○○

일차부등식 $\frac{1}{2}(0.4x+5)>1.2x+1$을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하여라.

4-3 ●○○

다음을 만족하는 가장 작은 정수 x의 값을 구하여라.

$$\frac{2x+5}{3}-\frac{5x-3}{4}<-\frac{5}{2}$$

4-4 ●●○

부등식 $3(x-2)-6x\ge3x-6a$를 만족하는 자연수 x가 2개일 때, a의 값의 범위를 구하여라.

5 x의 계수가 문자인 일차부등식의 풀이

x에 대한 부등식 $ax>b$의 풀이

(1) $a>0$이면 $x>\frac{b}{a}$

(2) $a<0$이면 $x<\frac{b}{a}$

Upgrade

(3) $a=0$, $b<0$이면 해는 모든 수이다.

(4) $a=0$, $b\geq 0$이면 해가 없다.

5-1

$a<b$일 때, x에 대한 일차부등식 $ax-5>bx+4$의 해를 구하여라.

5-2

x에 대한 부등식 $(a-1)x<4(a-1)$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $a>1$이면 $x<4$

ㄴ. $a=1$이면 해가 무수히 많다.

ㄷ. $a<1$이면 $x>4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5-3

부등식 $(a+1)x+1>3x+4a$의 해가 없을 때, 부등식 $-2ax-7a<x+1$을 만족하는 정수 x의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수)

6 해가 주어진 일차부등식

일차부등식의 해가 주어진 경우에는 해의 부등호의 방향에 따라 x의 계수의 부호를 알 수 있다.

즉, x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가

(1) $x>k$로 주어지면 $a>0$이고 $k=\frac{b}{a}$

(2) $x<k$로 주어지면 $a<0$이고 $k=\frac{b}{a}$

6-1

부등식 $-x+a\leq\frac{4}{5}$를 만족하는 x의 최솟값이 $-\frac{3}{10}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

6-2

부등식 $ax<b$의 해가 $x>\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $bx>a$의 해를 구하여라. (단, a, b는 상수)

6-3

일차부등식 $(6a-5)x<b$의 해가 $x<-\frac{1}{6}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

7 연립부등식의 풀이

1. 연립부등식의 풀이
   (1) 각 부등식의 해를 구한다.
   (2) (1)에서 구한 해를 수직선 위에 나타내고 공통부분을 찾는다.
2. $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 의 꼴로 고쳐서 해를 구한다.

7-1

연립부등식 $\begin{cases} 0.\dot{1}x+1.\dot{2}>0.\dot{2}(4-x) \\ \dfrac{x+5}{2}\geq 2(x-4) \end{cases}$ 를 풀어라.

7-2

연립부등식 $\begin{cases} 3(x+1)-a\geq -(x-4) \\ \dfrac{x-2}{2}+1.5>\dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$ 의 해가 $-\dfrac{1}{2}\leq x<b$ 일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

7-3

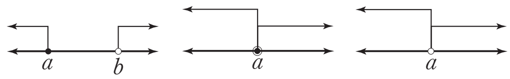
$3x+y=6$일 때, 부등식 $-x<2y\leq 3x$를 만족하는 자연수 x의 값을 구하여라.

8 해를 갖거나 갖지 않는 연립부등식

1. 연립부등식의 해가 존재하는 경우

$a\leq x<b$ $\qquad$ $x=a$

2. 연립부등식의 해가 없는 경우



이때 경계값의 등호 포함 여부에 주의한다.

8-1

연립부등식 $\begin{cases} 2(5-x)\geq 3x \\ x-a>-3 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

8-2

연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}(a+2)\geq 2x \\ 3x+1\geq 2x+2 \end{cases}$ 의 해가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

8-3

두 부등식 $\dfrac{x+3}{3}\geq a$, $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{3-x}{4}>\dfrac{x-2}{6}$ 를 동시에 만족하는 x의 값이 존재하기 위한 자연수 a의 최댓값을 구하여라. (단, a는 상수)

9 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식

(1) 각 부등식을 풀어 공통부분을 구한다.
(2) 정수인 해의 개수를 이용하여 (1)의 공통부분을 수직선 위에 나타내어 답을 구한다.

9-1

부등식 $-x+a<1-\frac{2-x}{2}\le\frac{x+2}{3}$를 만족하는 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

9-2

x에 대한 두 부등식 $\frac{2x-1}{3}<5$, $\frac{5-x}{2}<a$를 동시에 만족하는 모든 자연수 x의 합이 22이다. 이때 자연수 a의 값을 구하여라.

9-3

오른쪽 연립부등식의 해가 정수를 1개만 포함할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-5>5x+1 \\ 2x+45>5-6x \\ 3(x-a)\le x-8 \end{cases}$$

Upgrade

10 절댓값 기호를 포함하는 부등식

| | 안을 0이 되게 하는 수를 기준으로 범위를 나누어 푼다.

이때 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ 임을 이용한다.

1. a가 양수일 때
   (1) $|x|\le a$이면 $-a\le x\le a$
   (2) $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$
2. a, b가 양수일 때
   $a<|x|<b$이면 $a<x<b$ 또는 $-b<x<-a$

10-1

다음 부등식을 풀어라.

(1) $|2x+1|\le7$
(2) $|x-3|>5$
(3) $4<|x+2|<7$

10-2

x에 대한 부등식 $|x-1|\le2x-3$의 해를 구하여라.

10-3

부등식 $||x|-1|\le2$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

10-4

x에 대한 부등식 $|ax-3|\le5$의 해가 $-2\le x\le8$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

정답과 해설 p.44

01

네 양수 a, b, c, d가 다음 조건을 모두 만족할 때, 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

조건
(가) $a+b=c+d$
(나) $a+d>b+c$
(다) $ac>ad$

① $a>b>c>d$
② $a>c>d>b$
③ $b>c>a>d$
④ $b>c>d>a$
⑤ $c>d>a>b$

02

네 자연수 a, b, c, d가 다음 조건을 모두 만족할 때, a의 최댓값을 구하여라.

조건
(가) $a<4b$
(나) $b<3c$
(다) $c<2d$
(라) $d<10$

03

$-2\le x\le 5$, $-3\le y\le 3$일 때, x^2-5y의 값의 범위를 구하여라.

04

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases}4x-2y=5\\-x+3y=a\end{cases}$를 만족하는 x의 값이 1 이상 3 이하일 때, 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

05

부등식 $3x+7y\le 25$를 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 3개
② 6개
③ 8개
④ 10개
⑤ 12개

06

$x+y=14$, $0<2x-y<2$를 동시에 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 구하여라.

07

부등식 $-4<3[x]-2\leq 1$을 만족하는 x의 값의 범위가 $a\leq x<b$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

08

부등식 $ax-b<bx+a$에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b는 상수)

보기

ㄱ. $a>b$일 때, 해는 모든 수이다.
ㄴ. $a<b$일 때, 해는 없다.
ㄷ. $a<0$, $b<0$일 때, $a=b$이면 해는 없다.
ㄹ. $a>0$, $b>0$일 때, $a=b$이면 해가 무수히 많다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

09

부등식 $(a+b)x-a+3b<0$의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $(a-2b)x+3a-b>0$의 해를 구하여라.

(단, a, b는 상수)

10

부등식 $\frac{1}{3}\leq\left|\frac{x-1}{3}\right|<2$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

11

x에 대한 부등식 $|-x+1|<a$를 만족하는 정수 x가 3개일 때, 양수 a의 값의 범위는?

① $0<a<1$ ② $0<a<2$ ③ $1\leq a<2$
④ $1<a\leq 2$ ⑤ $1\leq a\leq 2$

12

두 수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}>0$이고 $\frac{3a+2b}{2a+3b}=k$라 할 때, k의 값의 범위를 구하여라.

13

연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ ax+y=3 \end{cases}$ 의 해 x, y가 모두 양수일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

14

부등식 $2x-a<x+2a\le3(x-1)+b$를 연립부등식 $\begin{cases} 2x-a<x+2a \\ 2x-a\le3(x-1)+b \end{cases}$ 로 잘못 나타내어 풀었더니 해가 $-4\le x<6$이 되었다. 이때 처음 부등식의 해를 구하여라. (단, a, b는 상수)

15

$2a-3<0$을 만족하는 자연수 a에 대하여 다음 부등식을 풀어라.

$$1+2x+a\le\frac{7}{5}(x+4)<3x-a$$

16

$x+y+z=6$을 만족하는 세 수 x, y, z가 연립부등식 $\begin{cases} x+y\ge2-a \\ y+z\ge6-a \\ z+x\ge10-a \end{cases}$ 를 만족할 때, a의 최솟값을 구하여라.

17

부등식 $-a+3\le x\le a+2$를 만족하는 모든 x의 값이 연립부등식 $\begin{cases} 2x+1>-7 \\ 5x-7\le18 \end{cases}$ 을 만족할 때, 상수 a의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

18

정수 n에 대하여 $n-\frac{1}{2}\le x<n+\frac{1}{2}$일 때, $\langle x\rangle=n$이라 하자. 예를 들어 $\langle1.56\rangle=2$, $\langle0.3\rangle=0$이다. 이때 부등식 $1<\left\langle\frac{x-4}{2}\right\rangle<4$를 만족하는 x의 값의 범위를 구하여라.

정답과 해설 p.46

01 $0<a<b<c<d$일 때, 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

$$\frac{a}{d},\ \frac{c}{b},\ \frac{a+c}{b+d}$$

Tip 두 수 A, B에 대하여 $A-B>0$이면 $A>B$이다.

02 두 수 x, y는 $|x|\le 1$, $|y|\le 1$을 만족한다. $z=|x+y|+|x-1|+|2x-y+4|$일 때, z의 값의 범위를 구하여라.

Tip 양수 a에 대하여 $|x|\le a$이면 $-a\le x\le a$이다.

03 두 수 a, b에 대하여 $\max(a,\ b)$를 a, b 중에서 작지 않은 수라 하고, $\min(a,\ b)$를 a, b 중에서 크지 않은 수라 하자. 이때 다음을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하여라.

$$\max(x-7,\ 12)+\min(2x+1,\ 3)\le 20$$

Tip $\max(a,\ b)=\begin{cases} a & (a>b) \\ a \text{ 또는 } b & (a=b) \\ b & (a<b) \end{cases}$

04 연립방정식 $\begin{cases}[x]+[y]=7 \\ 2[x]-3[y]=-6\end{cases}$을 만족하는 두 유리수 x, y에 대하여 $[2x-3y]$의 값의 개수를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

Tip $n\le x<n+1$인 유리수 x에 대하여 $[x]=n$이다. (단, n은 정수)

Tip

05 $x\le y\le z$인 세 자연수 x, y, z가 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$을 만족할 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

$x\le y\le z$에서 $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$

06 $-1<x<3$, $3x-2y=0$일 때, xy의 값의 범위를 구하여라.

$3x=2y$이면
$x>0$, $y>0$ 또는 $x=0$, $y=0$ 또는 $x<0$, $y<0$이다.

07 $0<x<1$인 어떤 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

$0<x<1$과 $-1<x-a<1$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하면 된다.

08 부등식 $|x-3|+2|x+1|\le5$를 만족하는 x의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

$|\ |$ 안을 0이 되게 하는 수를 기준으로 범위를 나눈다.

2 일차부등식과 연립부등식의 활용

Ⅲ 부등식

1 일차부등식과 연립부등식의 활용

일차부등식과 연립부등식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(1) 문제의 상황에 맞게 미지수 x를 정한다.

(2) x를 사용하여 문제의 뜻에 맞는 부등식을 세운다.

(3) 부등식을 풀어 x의 값의 범위를 구한다.

(4) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

• 미지수 x 정하기 → 부등식 세우기 → 부등식 풀기 → 확인하기

2 일차부등식과 연립부등식의 활용에서 자주 이용되는 관계

1. 수에 대한 문제

(1) 0 또는 한 자리의 자연수 x, y, z에 대하여

두 자리의 자연수 : $10x+y$ (단, $x\neq0$)

세 자리의 자연수 : $100x+10y+z$ (단, $x\neq0$)

(2) 연속하는 세 정수 : $x-1$, x, $x+1$

연속하는 세 짝수(홀수) : $x-2$, x, $x+2$ 또는 x, $x+2$, $x+4$

참고 ① 개수, 사람 수는 0 또는 자연수이다.

② 길이, 넓이 등은 양수이다.

2. 원가와 정가에 대한 문제

(1) 원가가 x원인 상품에 a%의 이익을 붙인 정가는

$$x+x\times\frac{a}{100}=x\left(1+\frac{a}{100}\right)\text{원}$$

(2) 정가가 x원인 상품을 b% 할인한 판매 가격은

$$x-x\times\frac{b}{100}=x\left(1-\frac{b}{100}\right)\text{원}$$

3. 거리, 속력, 시간에 대한 문제

(거리)=(속력)×(시간), (속력)=$\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$, (시간)=$\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

• 거리, 속력, 시간은 단위를 통일시켜야 한다.

4. 농도에 대한 문제

(소금물의 농도)=$\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100(\%)$

(소금의 양)=$\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

• 소금물에 물을 더 넣거나 물을 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다.

5. 배분에 대한 문제 (의자 수 문제)

의자 n개에 a명씩 앉으면 b명이 남는다. ⇨ 사람 수 : $(an+b)$명

6. 도형에 대한 문제

세 변의 길이가 주어질 때, 삼각형이 되는 조건은

(i) (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

(ii) (가장 짧은 변의 길이)>0

정답과 해설 p.48

1 수에 대한 문제

1. 두 자리의 자연수
   ⇨ $10x+y$ ($x=1, 2, \cdots, 9$이고 $y=0, 1, 2, \cdots, 9$)
2. 연속하는 세 정수 ⇨ $x-1, x, x+1$
   연속하는 세 짝수(홀수) ⇨ $x-2, x, x+2$
   또는 $x, x+2, x+4$

1-1

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 12인 두 자리의 자연수가 있다. 이 자연수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수의 2배보다 크다고 한다. 이때 처음 수를 구하여라.

1-2

연속하는 세 홀수가 있다. 세 수의 합은 42보다 크고, 가장 작은 수의 3배에서 4를 뺀 것은 다른 두 수의 합에 5를 더한 것보다 작다. 이때 연속하는 세 홀수를 구하여라.

1-3

분모, 분자가 모두 자연수인 어떤 기약분수에 대하여 분모에 2를 더해서 약분했더니 $\frac{1}{3}$이 되었고, 분자에 6을 더했더니 1보다 크고 2보다 작은 수가 되었다. 이 분수를 구하여라.

2 원가와 정가에 대한 문제

1. 원가 a원에 $b\%$의 이익을 붙인 정가는
   $a+a\times\frac{b}{100}=a\left(1+\frac{b}{100}\right)$원
2. 정가 c원을 $d\%$ 할인한 판매 가격은
   $c-c\times\frac{d}{100}=c\left(1-\frac{d}{100}\right)$원

2-1

원가가 10000원인 물건을 정가의 2할을 할인하여 팔아서 원가의 4할 이상의 이익을 얻으려고 한다. 이때 정가는 최소 얼마로 정해야 하는지 구하여라.

2-2

우현이네 옷가게에서는 원가에 30%의 이익을 붙여서 청바지의 정가를 정하였다. 이 청바지를 할인 판매하려고 할 때, 손해가 없이 팔려면 정가의 최대 몇 %까지 할인할 수 있는지 구하여라.

(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

3 거리, 속력, 시간에 대한 문제

(거리)=(속력)×(시간), (속력)=$\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$, (시간)=$\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

3-1

어느 신문사에서 휴가철의 고속도로 상황을 헬리콥터로 취재하려고 한다. 헬리콥터는 1분에 5 km의 속력으로 날고, 이착륙하는 데 걸리는 시간과 사진을 촬영하는 데 걸리는 시간을 합하면 20분이 걸린다. 마감 시간까지는 1시간의 여유가 있을 때, 헬리콥터로 최대 몇 km 떨어진 곳까지 취재하고 돌아올 수 있는지 구하여라.

3-2

윤정이는 A지점에서 강 건너 B지점까지 $1\,km$를 수영을 하여 건너고, B지점에서 C지점까지 $30\,km$를 자전거로 간 후, C지점에서 D지점까지 $3\,km$를 달리는 철인 3종 경기에 참가했다. 윤정이의 수영 속력은 $80\,m$/분이고 자전거 속력은 $800\,m$/분이다. 이 경기에서 1시간 이내로 도착하는 것을 목표로 할 때, C지점에서 D지점까지 분속 몇 m 이상으로 달려야 하는지 구하여라.

3-3

서영이네 가족은 아버지의 회사에서 집까지 자동차로 20분 이상 25분 이하의 시간이 걸리는 거리에 있는 집으로 이사를 가려고 한다. 자동차는 회사를 출발하여 $6\,km$까지는 시속 $30\,km$로 달리고, 남은 거리는 시속 $60\,km$로 달린다고 할 때, 서영이네 집은 회사에서 몇 km 범위 내에 있어야 하는지 구하여라.

3-4

$50\,km$ 떨어진 두 라디오 방송국 A, B가 있다. A, B 두 방송국의 방송은 각각 방송국으로부터 $20\,km$, $16\,km$ 떨어진 곳까지 들을 수 있다고 한다. 준수가 8시에 A방송국에서 출발하여 라디오를 들으면서 자전거를 타고 시속 $12\,km$로 B방송국까지 갈 때, 방송을 전혀 들을 수 없는 시간대를 구하여라.

4 농도에 대한 문제

$$(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100(\%)$$

$$(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$$

4-1

$20\,\%$의 설탕물 $500\,g$을 끓여서 물을 증발시키고, 증발시킨 물의 양만큼 설탕을 더 넣어 농도가 $35\,\%$ 이상이 되게 하려고 한다. 이때 몇 g 이상의 물을 증발시켜야 하는지 구하여라.

4-2

$a\,\%$의 소금물 $100\,g$과 $b\,\%$의 소금물 $200\,g$을 섞어서 $10\,\%$의 소금물을 만들려고 한다. b는 a의 2배보다 크고 a의 3배보다 작을 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

(단, a는 정수)

4-3

$6\,\%$의 소금물 $300\,g$에 $2\,\%$의 소금물을 넣어서 $4\,\%$ 이상 $5\,\%$ 이하의 소금물을 만들려고 한다. 이때 $2\,\%$의 소금물은 얼마만큼 넣어야 하는지 구하여라.

5 배분에 대한 문제

(1) 의자 n개에 a명씩 앉으면 b명이 남는다.
⇨ 사람 수 : $(an+b)$명

(2) n명에게 물건을 a개씩 나누어 주면 b개가 남는다.
⇨ 물건의 개수 : $(an+b)$개

5-1 ●○○

어느 동호회 회원 80명이 캠핑을 하는데 한 텐트에 7명씩 자면 텐트가 모자라서 9명씩 자기로 하였다. 이때 텐트는 최소 몇 개가 있는지 구하여라.

5-2 ●●○

음악실에서 학생들이 한 의자에 4명씩 앉으면 학생이 3명 남고, 7명씩 앉으면 의자가 4개 남는다. 이때 음악실에 있는 의자의 개수를 구하여라.

5-3 ●●○

어느 산악회에서 사과를 한 회원에게 3개씩 나누어 주면 37개가 남고, 5개씩 나누어 주면 마지막 한 명의 회원에게는 1개 이상 줄 수 있으나 5개를 줄 수는 없다. 이 산악회의 회원 수를 a명, 사과의 개수를 b개라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

5-4 ●●○

어느 학급에서 불우 이웃 돕기 성금을 모으는데 그 내용이 다음과 같다. 이때 학생들의 최대 인원수와 최소 인원수의 차를 구하여라.

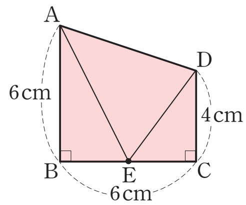
(가) 한 학생이 10000원씩 내면 목표한 금액보다 12500원이 많다.
(나) 한 학생이 9500원씩 내면 목표한 금액보다 3000원 미만이 부족하다.

6 도형에 대한 문제

1. 도형의 둘레의 길이 l 또는 넓이 S가 a 이상 b 이하일 때 ⇨ $a \le l \le b$, $a \le S \le b$
2. 삼각형이 되는 조건
⇨ (가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)
(가장 짧은 변의 길이) > 0

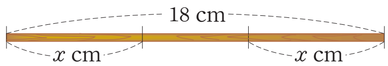
6-1 ●○○

오른쪽 그림의 사다리꼴 ABCD에서 점 E는 변 BC 위를 움직인다. 이때 △AED의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이하가 되게 하는 $\overline{BE}$의 길이의 범위를 구하여라.



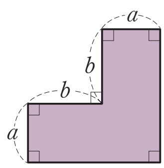
6-2 ●●○

다음 그림과 같이 길이가 18 cm인 나무막대를 양 끝으로부터 x cm가 되는 지점에서 각각 잘랐다. 이때 생긴 3개의 조각으로 삼각형을 만들었다고 할 때, x의 값의 범위를 구하여라.



6-3 ●●○

오른쪽 그림의 도형의 넓이가 80이고 $2<a<4$일 때, b의 값의 범위를 구하여라.



7 여러 가지 부등식의 활용 문제

미지수 x 정하기 ⇨ 부등식 세우기 ⇨ 부등식 풀기 ⇨ 확인하기

7-1

A마트와 B마트에서는 다음과 같이 삼각김밥을 판매하고 있고 삼각김밥 1개의 가격은 두 마트 모두 800원이다. 각 마트에서 한 번씩만 구매할 수 있을 때, 필요한 삼각김밥이 몇 개 이상이면 A마트에서 사는 것이 더 유리한지 구하여라.

A마트 : 삼각김밥 전체 구매 금액의 15%를 할인해 드립니다.
B마트 : 삼각김밥을 구매하면 개수와 상관없이 1개를 덤으로 드립니다.

7-2

어느 중학교의 학생회장 선거에서 전체 851표 중 현재까지 551표를 개표한 결과, A 후보가 251표, B 후보가 200표, C 후보가 100표를 얻었다. 최다 득표자가 당선된다고 할 때, A 후보는 당선이 확정되려면 최소한 몇 표를 더 얻어야 하는지 구하여라. (단, 각 학생은 A, B, C 후보 중 어느 한 명에게만 기표하며 무효표는 없다.)

7-3

어느 놀이 공원의 한 사람 당 입장료는 600원인데 단체의 경우 20명을 초과한 인원수에 대해서는 한 사람 당 300원이다. 30명 이상의 단체가 입장할 때, 한 사람 입장료의 평균이 400원 이하가 되도록 하려면 몇 명 이상이 입장해야 하는지 구하여라.

7-4

고등학생 한 명이 6일, 중학생 한 명이 12일 걸려야 마칠 수 있는 일을 중학생과 고등학생을 합해 10명인 한 팀이 하루만에 마치려고 한다. 이 팀에는 중학생이 최대 몇 명까지 포함될 수 있는지 구하여라. (단, 각 고등학생은 능력이 모두 같고, 각 중학생은 능력이 모두 같다.)

7-5

다음은 4개의 도시 A, B, C, D에 대하여 5월 한 달 동안의 평균 기온을 조사하여 표로 나타낸 것이다.

도시	A	B	C	D
평균 기온	23℃	27℃	x℃	22℃

A도시와 B도시의 평균 기온의 차와 A도시와 C도시의 평균 기온의 차의 합이 6℃보다 크지 않을 때, C도시와 D도시의 평균 기온의 차의 최댓값을 구하여라.

7-6

수진이는 800 g짜리 소포 x개와 2.7 kg짜리 소포 y개를 다음 요금표에 따라 보내려고 한다. 소포의 총 무게가 16 kg 이하이고, 요금의 합계가 4200원일 때, x와 y의 값을 각각 구하여라. (단, $x<y$)

무게(kg)	요금(원)
0 이상 ~ 0.5 미만	300
0.5 ~ 1	400
1 ~ 2	500
2 ~ 3	600

● 정답과 해설 p.50

01

분모가 20과 30 사이의 수인 어떤 기약분수를 소수로 나타내면 무한소수 $0.06\times\times\times$이 된다고 할 때, 이 기약분수를 구하여라.

02

종착역이 서울역인 기차가 시속 80 km의 속력으로 청주역을 출발하여 서울역과 120 km 떨어진 천안역을 통과하고 있다. 그런데 이 속력으로 계속 가면 도착 예정시간보다 30분 늦게 도착한다고 한다. 도착 예정시간보다 늦어지는 시간이 15분 이하가 되게 서울역에 도착하려면 천안역에서부터 시속 몇 km 이상 몇 km 이하의 속력으로 달려야 하는지 구하여라.

(단, 도착 예정 시간보다 빨리 도착하지는 않는다.)

03

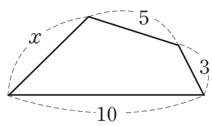
8 %의 설탕물 200 g에 10 %의 설탕물을 적당히 섞어 농도가 8.5 % 이상 8.75 % 이하의 설탕물을 만들려고 하는데, 실수로 5 %의 설탕물을 100 g 넣었다. 원래 계획했던 설탕물을 만들기 위해서는 10 %의 설탕물을 x g 더 넣어야 한다고 할 때, x의 값의 범위를 구하여라.

04

상자에 야구공을 넣는데 한 상자에 5개씩 넣으면 공이 12개가 남아서 9개씩 넣었더니 상자 4개가 비었다. 그래서 몇 상자에는 5개씩, 몇 상자에는 9개씩 넣었더니 남는 공 없이 모든 상자에 딱 맞게 들어간다고 할 때, 9개씩 넣은 상자의 개수를 구하여라.

05

오른쪽 그림과 같이 3, 5, 10, x가 볼록사각형의 이웃한 변의 길이가 될 수 있는 x의 값의 범위를 구하여라.



06

어느 지역선거에 A, B, C 세 명이 입후보하였다. 선거 전 예상 득표 수를 조사하였더니 C의 예상 득표 수는 A의 예상 득표 수의 $\frac{1}{3}$ 이상이고 B의 예상 득표 수의 $\frac{1}{2}$을 넘지 않았다. A와 C의 예상 득표 수의 합이 최소 6000표일 때, B의 최소 예상 득표 수를 구하여라.

07

세린이는 자신이 태어난 날을 5배하여 30을 더한 값을 다시 2배한 후 태어난 달을 더하였더니 219가 되었다. 세린이의 생일은 몇 월 며칠인지 구하여라.

08

40점 만점으로 문항 수가 30개인 어느 시험은 한 문항당 배점이 1점, 1.5점, 2점의 세 가지이고 문항 수는 각각 a개, b개, c개씩 최소 한 문제 이상 출제된다. a의 최솟값과 최댓값을 각각 p, q라 하고, 가능한 b의 값의 개수를 n개라 할 때, $p+q+n$의 값을 구하여라.

09

어느 회사의 직원 수가 작년에는 600명이 안 되었고, 남자 직원 수와 여자 직원 수의 비가 5 : 3이었다. 올해 남자 직원과 여자 직원을 같은 수로 뽑았더니 전체 남자 직원 수와 여자 직원 수의 비가 11 : 7이 되었고, 총 직원 수는 650명을 넘었다. 이때 이 회사에서 올해 뽑은 여자 직원 수를 구하여라.

10

세 개의 선물 상자 A, B, C에 다음 조건을 모두 만족하도록 사탕을 담았다. 이때 B상자에 들어 있는 사탕의 개수의 최솟값을 구하여라.

조건

(가) 두 상자 A, B에 들어 있는 사탕의 개수의 합은 12개이다.
(나) 두 상자 A, C에 들어 있는 사탕의 개수의 합은 24개보다 많고 28개보다 적다.
(다) 두 상자 B, C에 들어 있는 사탕의 개수의 합은 18개보다 많고 22개보다 적다.

11

어느 쇼핑몰에서는 A, B, C 세 가지 종류의 추석맞이 선물세트를 준비하려고 한다. A세트에는 비누 4개와 치약 2개, B세트에는 비누 2개, 치약 2개, 샴푸 1개, C세트에는 비누 3개와 샴푸 1개가 들어 간다. 이 선물세트를 만들기 위해 치약은 560개, 샴푸는 330개를 사용하고 비누는 최대 770개까지 사용할 수 있다고 할 때, B세트는 최소 몇 개를 만들 수 있는지 구하여라.

STEP 3 최고 수준 완성하기

● 정답과 해설 p.52

Tip

01 평균이 12 이하인 서로 다른 세 자연수 중에서 각각 두 수를 선택하여 더하면 그 합의 비가 5 : 9 : 10이다. 이때 이 세 자연수 중에서 가장 큰 수의 최댓값을 구하여라.

서로 다른 세 자연수를 각각 x, y, z $(x<y<z)$로 놓고 푼다.

02 어느 공항에서 비행기표를 발매하기 시작했을 때 이미 300명이 줄을 서 있었고 1분마다 10명의 새로운 사람들이 줄을 선다고 한다. 발매 창구가 3개일 때, 줄 서 있는 사람들이 모두 비행기표를 구매하는 데 15분이 걸린다. 8분 이내에 줄 서 있는 사람들이 모두 비행기표를 구매하기 위해서는 현재 3개인 발매 창구에서 적어도 몇 개의 발매 창구가 더 추가되어야 하는지 구하여라.

한 발매 창구에서 1분 동안 발매하는 표를 x장이라 하고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

03 팥쥐 엄마는 콩쥐에게 1시간 뒤에 돌아올테니 항아리에 물을 가득 채워 놓으라고 하며 잔칫집에 갔다. 콩쥐는 1분에 2 L씩 물을 채우면 항아리가 1시간 안에 가득 채워지는 것을 알고 1시간 안에 일을 끝내려고 1분에 2 L씩의 물을 채우기 시작했다. 그런데 30분이 지난 후 항아리 안을 살펴보니 물이 항아리의 $\frac{1}{4}$밖에 차지 않았다. 이를 이상하게 여긴 콩쥐가 항아리의 바닥을 보니 바닥에 금이 가 있어 일정하게 물이 새어나가고 있었다. 팥쥐 엄마가 돌아왔을 때, 항아리에 물이 가득 차 있으려면 남은 30분 동안 콩쥐는 1분에 최소한 몇 L의 물을 부어야 하는지 구하여라.

1분에 얼마만큼의 물이 새어나가는지 생각해 본다.

04 제주도의 어느 지점 A에서 남서쪽으로 400 km 떨어진 해상에 태풍의 중심이 생성되었다. 이 태풍의 현재 세력권은 중심에서 반지름의 길이가 50 km인 크기로 세력권이 형성되어 있으며 시속 20 km로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍 세력권의 반지름의 길이가 1시간에 5 km씩 커질 때, A지점은 태풍의 세력권에 몇 시간 동안 들어 가게 되는지 구하여라. (단, 태풍의 중심은 A지점을 지나게 된다.)

태풍의 중심을 B라 하면 $\overline{AB} \le$(세력권의 반지름의 길이)

Tip

05 어떤 음악회에서 5분짜리 곡과 7분짜리 곡을 섞어서 연주하여 총 공연 시간을 1시간 25분으로 계획했으나 오케스트라측과 협의하여 5분짜리 곡과 7분짜리 곡의 수를 바꾸어 연주하였더니 총 공연 시간이 1시간 32분과 1시간 36분 사이가 되었다. 곡과 곡 사이에는 1분씩 쉬는 시간이 있다고 할 때, 처음에 연주하려고 계획했던 7분짜리 곡은 모두 몇 곡인지 구하여라.

A곡을 연주하는 동안 쉬는 시간은 모두 $(A-1)$분이다.

06 어느 지역의 택시요금은 2 km까지는 기본요금인 2400원이고, 2 km를 초과하는 순간부터 150 m마다 100원씩 올라간다고 한다. 예를 들어 2.01 km의 택시요금은 2500원이고, 2.2 km의 택시요금은 2600원이다. 이 지역의 버스 요금은 1인당 900원이고 4명이 움직인다고 할 때, 버스보다 택시를 이용하는 것이 경제적인 것은 몇 km 미만까지인지 소수점 아래 둘째 자리까지 구하여라.

택시요금은 2km를 초과하는 순간에 100원이 올라가는 것에 주의한다.

07 어느 야구장에서 입장객 전원에게 모자를 한 개씩 선물하려고 모자가 60개씩 들어 있는 상자를 몇 개 준비했다. 입장객은 대략 2000명 이상 2050명 이하였는데 모자가 부족해서 추가로 모자가 40개씩 들어 있는 상자를 처음에 준비한 모자 60개가 들어 있는 상자의 개수의 $\frac{1}{4}$개만큼 준비했더니 부족했던 수보다 많은 수의 모자가 남았다. 이때 모자가 40개 들어 있는 상자의 개수를 구하여라.

모자가 60개 들어 있는 상자의 개수를 x개, 입장객 수를 y명으로 놓는다.

퍼펙트 단원 마무리

● 정답과 해설 p.53

01

세 수 a, b, c를 수직선 위에 나타낸 것이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

① $ab>cb$　② $3-2a<3-2c$
③ $5+2a<5+2c$　④ $2-ab<2-cb$
⑤ $\dfrac{a}{b}+1>\dfrac{c}{b}+1$

02 | 과고 기출 유사 |

$\dfrac{x-y+1}{4}$이 정수일 때, 부등식 $-2\leq 2x-1\leq 4$, $3\leq 4-y\leq 4$를 만족하는 정수 x, y의 값을 각각 구하여라.

03

x에 대한 부등식 $\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{a}{2}$를 만족하는 자연수가 3개일 때, $2y+6a=3$을 만족하는 y의 값의 범위를 구하여라. (단, a는 상수)

04

정수가 아닌 유리수 x에 대하여 $y=2[x]+3$, $y=3[x-2]+5$일 때, $x+y$의 값의 범위를 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

05

연속하는 세 짝수 x, y, z가 $128\leq xy-yz\leq 132$를 만족할 때, $x+y+z$의 값을 구하여라. (단, $x>y>z$)

06

연립방정식 $\begin{cases} ax-y=5 \\ 2x+3ay=7 \end{cases}$의 해의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 제4사분면 위의 점일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

07

부등식 $2a+5b-5<(a+2b)x<a+b-1$의 해가 $4<x<5$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

08 | 자사고 기출 유사 |

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 2x+3<x+2a \\ ax+2a\ge 2x+a^2 \end{cases}$의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

09

부등식 $|2x-2|<k+2$의 해가 존재하기 위한 상수 k의 값의 범위는?

① $k\le 2$　② $k<2$　③ $k\ge -2$
④ $k>-2$　⑤ $k\le -2$

10

$\frac{1}{3}$과 1 사이의 기약분수 중에서 분자에 1이 아닌 정수 x를 더하고 분모에 정수 x를 곱해도 그 값이 변하지 않는 분수가 있다. 이때 이러한 모든 기약분수들의 분모의 합을 구하여라.

11

서로 다른 5개의 자연수 a, b, c, d, e가 다음 조건을 모두 만족할 때, e의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

조건
(가) $a=1$
(나) $a<b<c<d<e$
(다) $a+b+c+d+e=20$

12

다음 표는 두 식품 A, B 각각 100 g에 들어 있는 열량과 단백질의 양을 나타낸 것이다. 두 식품 A, B를 합하여 150 g을 섭취하여 열량은 300 kcal 이상, 단백질은 15 g 이상을 얻으려고 할 때, 식품 A는 얼마만큼 섭취해야 하는지 구하여라.

식품	열량 (kcal)	단백질 (g)
A	180	12
B	240	9

13

6개의 동전 A, B, C, D, E, F가 있다. 그중 5개의 무게는 같고 나머지 한 개만 무게가 가볍다. 또 A, B의 무게의 합은 C, D의 무게의 합보다 작고 B, C의 무게의 합은 E, F의 무게의 합보다 작다. 이때 6개의 동전 중 무게가 가벼운 동전을 말하여라.

14

어떤 소설책을 읽는데 하루에 13쪽씩 읽으면 24일이 채 다 걸리지 않고, 첫날 20쪽을 읽고 그 다음 날부터 하루에 10쪽씩 읽으면 30일보다 더 걸린다고 한다. 이 책의 전체 쪽수를 구하여라.

15 | 경시 기출 유사 |

다음은 어느 회사의 신입사원 면접의 점수 반영 비율을 표로 나타낸 것이다. 3차례에 걸쳐 면접을 실시한 후, 사장과 부장이 평가한 점수를 2 : 3의 비율로 반영하여 최종 점수를 산출한다.

	반영 비율		
	1차 면접	2차 면접	3차 면접
사장	30 %	40 %	30 %
부장	40 %	20 %	40 %

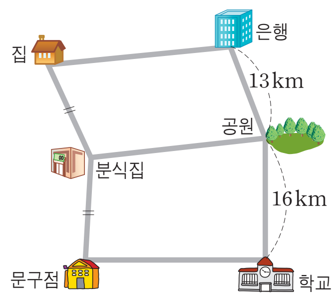
이 회사에서 면접을 본 A에 대해 사장은 1차에서 100점, 2차에서 75점, 3차에서 x점을 주었고, 부장은 1차에서 85점, 2차에서 y점, 3차에서 90점을 주었다. 최종 점수가 90점 이상이 되어야 합격한다고 할 때, A가 이 회사에 합격하기 위한 $x+y$의 최솟값을 구하여라.

16

선물 상자에 세 종류의 사탕 A, B, C가 총 26개 들어 있다. 사탕 A, B, C의 무게는 각각 4 g, 2 g, 1 g이고 상자 무게를 뺀 무게는 총 70 g이다. 사탕 A의 개수가 사탕 B의 개수보다 많고, 사탕 B의 개수가 사탕 C의 개수보다 많을 때, 선물 상자에 들어 있는 사탕 A, B, C의 개수를 각각 구하여라.

17

다음 그림과 같이 은행에서 13 km 떨어진 곳에 공원이 있고, 공원에서 16 km 떨어진 곳에 학교가 있으며, 분식집에서 집까지의 거리와 분식집에서 문구점까지의 거리가 같다. 은행에서 문구점으로 가는 방법은 은행에서 공원, 학교를 거쳐 문구점까지, 은행에서 공원, 분식집을 거쳐 문구점까지, 은행에서 집, 분식집을 거쳐 문구점까지 가는 세 가지인데, 이 세 경우의 거리가 모두 같다. 또 학교에서 집으로 갈 때는 학교에서 문구점, 분식집을 거쳐 집으로 가는 길이 가장 짧고, 학교에서 공원, 분식집을 거쳐 집으로 가는 길이 가장 길다고 한다. 집에서 분식집까지의 거리의 범위를 구하여라.



특목 경시 대비 논술·구술 도전하기

1 $A<B<C$꼴의 부등식은 다음과 같은 세 가지 형태의 연립부등식으로 생각할 수 있다. 하지만 이 중에서 한 가지의 형태만이 부등식 $A<B<C$와 해가 일치한다. 그 이유를 설명하고 해가 일치하지 않는 예를 하나 이상 보여라.

$$\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases},\ \begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases},\ \begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$$

답안 작성

출제 의도

연립부등식의 표현과 그 의미를 정확하게 이해하고 있는가를 묻는 문제로 $A<B<C$꼴의 부등식의 해와 주어진 2가지 형태의 연립부등식의 해가 일치하지 않는 이유를 논리적으로 설명하고, 설명을 뒷받침할 수 있는 간단한 부등식의 예를 보일 수 있도록 한다.

● 정답과 해설 p.55

2 다음은 시내 전화 요금 변경에 관한 어느 신문 기사의 일부이다. 시내 전화 요금이 기사의 내용과 같이 변경될 때, '한 달 통화량이 적은 일반 가정 가입자'에게 더 불리한 이유를 논리적으로 설명하여라.

정보통신부가 시내 전화 요금 조정안을 최종 승인하였다.

요금 조정안에 따르면 시내 전화 요금의 월 기본료는 4000원에서 5200원으로 인상되고, 1통화를 3분으로 할 때, 통화료는 3분당 45원에서 39원으로 6원 인하된다. 시내 전화 요금의 기본료 인상은 지난 1981년 이후 처음이다. 이번 요금 조정안으로 인하여 시내 전화는 요금 인하 효과가 발생하게 될 것이라고 정보통신부는 설명했다.

그러나 이러한 조정안은 여전히 한 달 통화량이 적은 일반 가정 가입자에게 불리한 것으로 지적되고 있다.

답안 작성

출제 의도

일상생활과 밀접한 연관이 있는 문제 상황을 수학적으로 해석하고 논리적으로 설명할 수 있는가를 묻는 문제이다. 주어진 글의 의미를 해석한 후 일차부등식을 활용하여 변경된 전화 요금 제도가 한 달 통화량이 적은 일반 가정 가입자에게 불리한 이유를 논리적으로 설명할 수 있도록 한다.

나만의 수학 블로그 Blog

흥미롭고 신기한 수학의 세상
수준 높은 수학 이야기로 나만의 수학 블로그를 만들어 보세요~~

• 부등식을 이용하여 퍼즐을 푼다?

오른쪽은 세 자리의 자연수와 두 자리의 자연수의 곱셈을 나타낸 것이다. □ 안에는 0 또는 한 자리의 자연수가 들어갈 수 있을 때, □ 안에 알맞은 숫자를 넣어서 곱셈 퍼즐을 완성하여 보자.

$$\begin{array}{rcccc} & & \square & \square & \square \\ \times & & & 7 & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \\ \hline & \square & \square & \square & 1 \end{array}$$

오른쪽과 같이 □ 안의 숫자를 각각 a, b, c, $\cdots$, n이라 하자.

이때 $h=1$이 분명하다.

$abc \times d$는 네 자리의 수이고, $abc \times 7$은 세 자리의 수이므로 $d>7$에서

$d=8$ 또는 $d=9$

그런데 $c \times d$의 일의 자리의 숫자가 1이 되어야 하므로 d는 8이 될 수 없다.

따라서 $d=9$, $c=9$이다.

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} \\ \times & & & 7 & \boxed{d} \\ \hline & \boxed{e} & \boxed{f} & \boxed{g} & \boxed{h} \\ & \boxed{i} & \boxed{j} & \boxed{k} & \\ \hline & \boxed{l} & \boxed{m} & \boxed{n} & 1 \end{array}$$

또 오른쪽 계산에서 $ab9 \times 9$가 네 자리의 수이므로

$ab9 \times 9 > 999$에서 $ab9 > 111$ $\cdots$ ㉠

$ab9 \times 79$가 네 자리의 수이므로

$ab9 \times 79 < 10000$에서 $ab9 < 126.5\times\times\times$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $111 < ab9 < 126.5\times\times\times$이므로

$a=1$, $b=1$

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{a} & \boxed{b} & 9 \\ \times & & & 7 & 9 \\ \hline & \boxed{e} & \boxed{f} & \boxed{g} & 1 \\ & \boxed{i} & \boxed{j} & \boxed{k} & \\ \hline & \boxed{l} & \boxed{m} & \boxed{n} & 1 \end{array}$$

따라서 119×79를 계산하여 나머지 □ 안을 채우면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 1 & 9 \\ \times & & & 7 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & 1 \\ & 8 & 3 & 3 & \\ \hline & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

이처럼 곱셈 퍼즐을 완성할 때, 부등식을 이용하여 각 자리의 숫자를 유추하면 쉽고 간단하게 완성할 수 있다.

IV

일차함수

1 일차함수와 그 그래프

IV 일차함수

1 일차함수의 뜻과 그 그래프

1. 일차함수의 뜻

함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식, 즉

$$y=ax+b\ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq0)$$

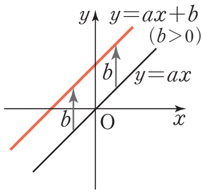
의 꼴로 나타날 때, 이 함수를 일차함수라고 한다.

• 특별한 말이 없으면 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 범위는 수 전체로 생각한다.

2. 일차함수 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프

(1) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.

참고 평행이동 : 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것



• $y=ax(a\neq0)$의 그래프는 원점을 지나는 직선이다.

Up grade

(2) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 c만큼 평행이동하면 일차함수 $y=ax+b+c$의 그래프가 된다.

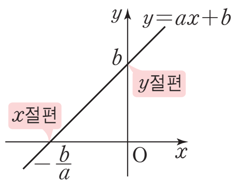
(3) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 x축의 방향으로 d만큼 평행이동하면 일차함수 $y=a(x-d)+b$의 그래프가 된다.

• x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 주어진 함수의 식에 x 대신 $x-p$를, y 대신 $y-q$를 각각 대입한다.
$y=f(x)$ ⇨ $y-q=f(x-p)$

3. 일차함수의 그래프의 x절편, y절편

(1) x절편 : 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표
⇨ $y=0$일 때의 x의 값

(2) y절편 : 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표
⇨ $x=0$일 때의 y의 값



4. 일차함수의 그래프의 기울기

일차함수 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=a$$

• 기울기는 직선의 기울어진 정도를 나타낸다.

Up grade

5. 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

| | 안을 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 그래프를 그린다.

2 일차함수의 그래프의 성질

1. 일차함수 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프의 성질

(1) $a>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
⇨ 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이다.

(2) $a<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
⇨ 그래프는 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

2. 일차함수의 그래프의 평행, 일치

(1) 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.

(2) 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

참고 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$의 그래프에서

① $a=a'$, $b\neq b'$ ⇨ 평행하다.

② $a=a'$, $b=b'$ ⇨ 일치한다.

Up grade

3. 일차함수의 그래프의 수직

서로 수직인 두 일차함수의 그래프의 기울기의 곱은 -1이다.

⇨ 일차함수 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$의 그래프가 서로 수직이면 $aa'=-1$

• 기울기가 다른 두 일차함수의 그래프는 한 점에서 만난다.

3 일차함수의 식 구하기

1. 기울기와 직선 위의 한 점이 주어질 때

(1) 기울기가 a이고 y절편이 b인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=ax+b$이다.

(2) 기울기가 a이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

[방법 1] 일차함수의 식을 $y=ax+b$라 하고, $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 b의 값을 구한다.

Up grade

[방법 2] $y-y_1=a(x-x_1)$

• 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$를 잇는 선분의 중점을 지나고 기울기가 m인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 중점 $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$를 구한 후, (2)의 방법으로 구한다.

2. 직선 위의 서로 다른 두 점이 주어질 때

(1) 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

[방법 1] (기울기)$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 구한 후, 일차함수의 식을 $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+b$라 하고 한 점의 좌표를 대입하여 b의 값을 구한다. (단, $x_1\neq x_2$)

Up grade

[방법 2] $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

(2) x절편이 a이고, y절편이 b인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

[방법 1] 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로 (기울기)$=\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}$이고, y절편이 b이므로 $y=-\frac{b}{a}x+b$이다. (단, $ab\neq 0$)

Up grade

[방법 2] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $ab\neq 0$)

4 일차함수의 활용

일차함수의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

x, y 정하기 → x, y 사이의 관계식 세우기 → 답 구하기 → 확인하기

• x, y 사이의 관계식을 세울 때, x의 값의 범위를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

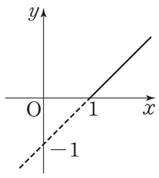
Upgrade 집중연구

■ 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

함수 $y=|x-1|$은 $x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 범위를 나눈다.

(i) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$

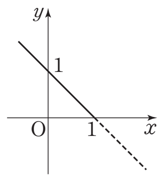
$\therefore\ y=x-1$



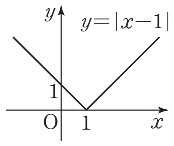
(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$y=-(x-1)$

$\therefore\ y=-x+1$



따라서 (i), (ii)에 의해 $y=|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



■ 기울기가 a이고 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식

기울기가 $a(a\neq0)$인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y=ax+b$ …㉠

라 하면 ㉠의 그래프는 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나므로 $y_1=ax_1+b$ …㉡

㉠−㉡을 하면 $\boldsymbol{y-y_1=a(x-x_1)}$ …㉢

예 기울기가 3이고 점 (1, 2)를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-2=3(x-1)$ $\quad\therefore\ y=3x-1$

■ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식

$x_1\neq x_2$일 때, 직선의 기울기 a는 $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ …㉣

즉, 기울기가 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식이므로

㉣을 ㉢에 대입하면 $\boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$ …㉤

예 두 점 (1, 2), (3, 4)를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-2=\dfrac{4-2}{3-1}(x-1)$ $\quad\therefore\ y=x+1$

■ x절편이 a, y절편이 b인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식

$ab\neq0$일 때, x절편이 a, y절편이 b인 직선은 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지난다.

즉, 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 ㉤에 의해

$y-b=\dfrac{b-0}{0-a}(x-0)$ $\quad\therefore\ \dfrac{b}{a}x+y=b$

위의 식의 양변을 b로 나누면 $\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

예 x절편이 2, y절편이 3인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ $\quad\therefore\ y=-\dfrac{3}{2}x+3$

STEP 1 유형별 문제 공략하기

정답과 해설 p.56

1 일차함수의 뜻

1. 일차함수
   함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식 $y=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq 0$)의 꼴로 나타날 때, 이 함수를 일차함수라고 한다.
2. 일차함수의 함숫값
   일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $x=t$일 때의 함숫값은 $f(t)=at+b$이다.

1-1

다음 중 y가 x에 대한 일차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 정x각형의 대각선의 개수는 y개이다.
② 가로의 길이가 x cm, 세로의 길이가 4 cm인 직사각형의 둘레의 길이는 y cm이다.
③ 반지름의 길이가 $2x$ cm인 원의 넓이는 $y\text{ cm}^2$이다.
④ x시간 동안 10 km를 달린 속력은 시속 y km이다.
⑤ 길이가 30 cm인 초가 1분에 0.1 cm씩 x분 동안 타고 남은 길이는 y cm이다.

1-2

일차함수 $f(x)=(a+1)x+(a^2-2a+1)$에 대하여 $f(2)=3$일 때, $f(1)+2f(4)=3f(b)$를 만족하는 b의 값을 구하여라. (단, a는 상수)

1-3

함수 $y=x(ax-4)+bx-c$가 일차함수가 되기 위한 조건을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

2 일차함수 $y=ax+b$의 그래프

1. 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 ⇨ $y=ax+b$

Upgrade

2. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를
   (1) y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
   ⇨ $y=ax+b+n$
   (2) x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면
   ⇨ $y=a(x-m)+b$

2-1

일차함수 $y=2ax+5$의 그래프를 y축의 방향으로 -7만큼 평행이동하면 $y=4x+b$의 그래프와 겹쳐진다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

2-2

점 $(-a,\ a)$를 지나는 일차함수 $y=3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼 평행이동하였다. 이때 평행이동한 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 같은 점의 좌표를 구하여라.

2-3

일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 $f:(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-3)$인 규칙으로 옮기면 $y=4x-5$의 그래프와 일치한다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

3 x절편과 y절편

일차함수 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서

(1) x절편 : $y=0$일 때의 x의 값 ⇨ $-\dfrac{b}{a}$

(2) y절편 : $x=0$일 때의 y의 값 ⇨ b

3-1 ●○○

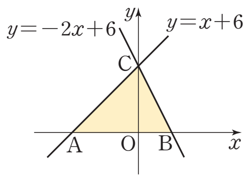
일차함수 $y=2x-b$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 x절편이 a, y절편이 $2a+4$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, b는 상수)

3-2 ●●○

세 일차함수 $\begin{cases} y=2x-3 & \cdots ㉠ \\ y=3x+a & \cdots ㉡ \\ y=bx-2 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 에서 ㉠과 ㉡의 그래프는 y축에서 만나고, ㉡과 ㉢의 그래프는 x축에서 만난다. 이때 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 x절편을 구하여라. (단, a, b는 상수)

3-3 ●●○

두 일차함수 $y=x+6$, $y=-2x+6$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, △ABC의 넓이를 구하여라.



3-4 ●●○

일차함수 $y=ax-5$의 그래프와 일차함수 $y=2ax+3$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이다. 이때 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

4 기울기

1. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기 ⇨ a
2. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기
   ⇨ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)
3. x절편이 m, y절편이 n인 직선의 기울기 ⇨ $-\dfrac{n}{m}$

4-1 ●○○

x절편이 -4, y절편이 a인 일차함수의 그래프가 두 점 $(4,\ 2)$, $(8,\ 3)$을 지날 때, a의 값을 구하여라.

4-2 ●●○

좌표평면 위의 세 점 $(1,\ 2)$, $(-1,\ -a+1)$, $(2,\ a+3)$이 삼각형을 이루지 않을 때, a의 값을 구하여라.

4-3 ●●○

세 점 $(0,\ 4)$, $(a,\ 0)$, $(b,\ 3)$을 지나는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 6이다. 이때 $b-a$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

4-4 ●●○

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 3만큼 증가할 때 y의 값은 k만큼 증가한다. 서로 다른 두 수 p, q에 대하여 다음 식을 만족할 때, k의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$f(p)-f(q)=5q-5p$$

Upgrade

5 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

(1) | | 안을 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.
(2) 범위에 맞는 함수의 식을 구해 그래프를 그린다.

5-1

함수 $y=|x+3|-2$에 대하여 x의 값의 범위가 수 전체일 때, y의 최솟값을 구하여라.

5-2

함수 $y=\frac{2}{3}|x|-6$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

6 일차함수의 그래프의 모양

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

(1) 직선이 ┌ 오른쪽 위로(↗) 향하면 $a>0$
　　　　　└ 오른쪽 아래로(↘) 향하면 $a<0$

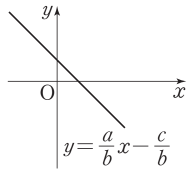
(2) 직선이 ┌ y축과 양의 부분에서 만나면 $b>0$
　　　　　└ y축과 음의 부분에서 만나면 $b<0$

6-1

일차함수 $y=(2a+1)x+a-1$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 상수 a의 최댓값을 구하여라.

6-2

일차함수 $y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, ac의 부호를 정하여라. (단, a, b, c는 상수)



6-3

일차함수 $y=abx+b$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않을 때, $y=bx+a-b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하여라.

7 일차함수의 그래프의 위치 관계

두 일차함수 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$에서
1. $a=a'$, $b\neq b'$ $\Longleftrightarrow$ 두 그래프는 평행
2. $a=a'$, $b=b'$ $\Longleftrightarrow$ 두 그래프는 일치

Upgrade

3. $aa'=-1$ $\Longleftrightarrow$ 두 그래프는 수직

7-1

점 $(-1, 0)$을 지나는 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 $y=\frac{4}{a}x-c$의 그래프와 일치할 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

7-2

일차함수 $y=ax-1$의 그래프는 일차함수 $y=bx+b$의 그래프와 서로 평행하고, 일차함수 $y=2x-\frac{1}{4}$의 그래프와 수직이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

7-3

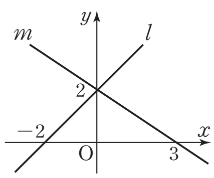
일차함수 $y=\frac{a}{3}x+\frac{1}{2}$의 그래프가 두 함수 $y=\frac{b}{2}x+3$, $y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프와 각각 평행할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

7-4

좌표평면 위의 두 점 $A(-2,\ 8)$, $B(6,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선을 그래프로 하는 일차함수의 식이 $y=ax+\frac{7}{3}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

7-5

오른쪽 그림과 같은 두 직선 l, m과 일차함수 $y=ax+4a$의 그래프를 이용하여 삼각형을 만들 수 없다. 이때 상수 a의 값을 모두 구하여라.



8 일차함수의 식 구하기

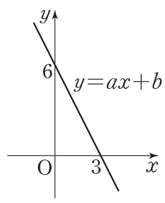
1. 기울기가 m이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식
   ⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$
2. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식
   ⇨ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

8-1

일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프와 평행하고, 점 $(1,\ -4)$를 지난다. 이때 일차함수 $y=f(x)$의 식을 구하여라.

8-2

오른쪽 그림과 같은 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 일차함수 $y=mx+3$의 그래프와 수직일 때, 상수 m의 값을 구하여라.



8-3

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, 상수 a, b, k의 값을 각각 구하여라.

조건

(가) 서로 다른 두 수 m, n에 대하여

$$\frac{f(m)-f(n)}{2}=n-m$$

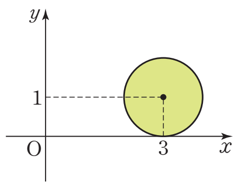
(나) 두 점 $(1,\ 2)$, $(5,\ k)$를 지난다.

8-4 ●●○

평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점이 A$(-2,\ 3)$, B$(1,\ 4)$, C$(-1,\ 3)$일 때, 두 점 C, D를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

8-5 ●●○

오른쪽 그림과 같이 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 $(-2,\ 2)$를 지나고 이 원의 넓이를 이등분하는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.



8-6 ●●●

△ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 P$(3,\ 4)$, Q$(4,\ -1)$, R$(6,\ 1)$이라 할 때, 직선 AB를 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

9 일차함수의 활용

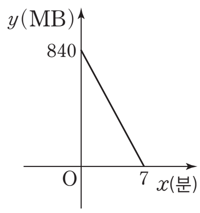
일차함수의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
x, y 정하기 ⇨ x, y 사이의 관계식 세우기
⇨ 답 구하기 ⇨ 확인하기
이때 x의 값의 범위에 주의한다.

9-1 ●○○

수은의 녹는점은 -39 ℃이고, 끓는점은 357 ℃이다. 수은의 녹는점을 0 H로 하고, 끓는점을 100 H로 하는 새로운 온도 단위를 H라고 하자. x ℃일 때, y H라 하면 y는 x에 대한 일차함수일 때, 현재 온도 27 ℃를 새로운 온도 단위 H를 사용하여 나타내어라.

9-2 ●○○

오른쪽 그림은 크기가 840 MB인 파일을 다운로드할 때 x분 후 남은 파일의 양 y MB 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 파일의 용량이 480 MB 남아 있을 때는 다운로드를 시작한 지 몇 분 후인지 구하여라.



9-3 ●●○

소정이와 우영이가 학교에서 2.7 km 떨어진 도서관에 가는데 소정이는 분속 60 m로 걸어가고 우영이는 소정이가 출발한 지 6분 후에 출발하여 분속 180 m로 자전거를 타고 달린다. 우영이가 출발한 지 x분 후에 소정이와 우영이 사이의 거리를 y m라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(단, $0 \le x \le 15$)

(1) x, y 사이의 관계식을 구하여라.

(2) 소정이와 우영이 사이의 거리가 1.2 km가 되는 것은 우영이가 출발한 지 몇 분 후인지 구하여라.

정답과 해설 p.59

01

일차함수 $f(x)=ax+b$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $f(4)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

조건

(가) $f(-1)=-1$

(나) $f^3(x)=f(f(f(x)))$이라 하면

$f^3(3)-f^3(2)=-1$

02

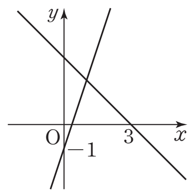
일차함수 $f(x)=ax-2a+3$에서 $-2<x\leq 1$일 때, $f(x)<0$이 항상 성립하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

03

일차함수 $y=-\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하였을 때, 이 평행이동한 그래프가 두 점 A$(1,\ 2)$, B$(-2,\ -1)$을 이은 선분 AB와 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구하여라.

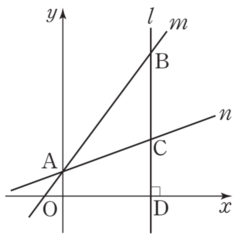
04

오른쪽 그림은 두 일차함수 $y=ax-2+b$, $y=(a-4)x+3b$의 그래프이다. 이때 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.



05

오른쪽 그림과 같이 두 일차함수의 그래프 m, n이 y축 위의 한 점 A를 지난다. y축에 평행한 직선 l이 직선 m, 직선 n, x축과 만나는 점을 각각 B, C, D라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OD}}$일 때, 두 직선 m, n의 기울기의 차를 구하여라.



06

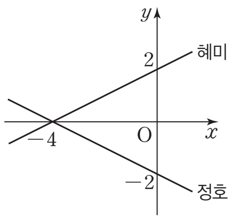
일차함수 $y=2x+k$의 그래프가 세 점 A$(1,\ 4)$, B$(6,\ 1)$, C$(4,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC와 만날 때, 상수 k의 최댓값과 최솟값을 순서대로 나열하면?

① 2, 0　　② 2, -2　　③ 2, -11

④ 11, 2　　⑤ 11, -2

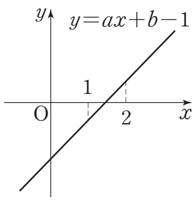
07

정호와 혜미 두 사람이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 오른쪽 그림과 같이 그렸는데, 정호는 a의 값을 잘못 보고, 혜미는 b의 값을 잘못 보고 그린 것이다. 이 때 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.



08

일차함수 $y=ax+b-1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.



보기

ㄱ. $a>0$, $b<1$	ㄴ. $a>0$, $b>1$
ㄷ. $a+b<1$	ㄹ. $a+b>1$
ㅁ. $2a+b<1$	ㅂ. $2a+b>1$

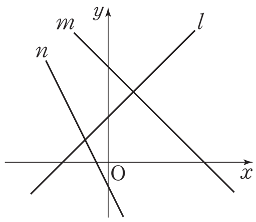
09

$ab^2c>0$일 때, 일차함수 $y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{b}$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?

① 제1사분면, 제2사분면 ② 제1사분면, 제3사분면
③ 제1사분면, 제4사분면 ④ 제2사분면, 제3사분면
⑤ 제3사분면, 제4사분면

10

세 일차함수 $\begin{cases} y=ax+b & \cdots ㉠ \\ y=\frac{2}{a}x-\frac{1}{2}b & \cdots ㉡ \\ y=-ax+b-3 & \cdots ㉢ \end{cases}$의 그래프가 다음과 같을 때, ㉠, ㉡, ㉢의 그래프를 l, m, n과 바르게 짝지어라. (단, a, b는 상수)



11

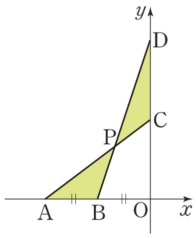
x의 값의 범위가 $-1\le x\le 4$일 때, 함수 $f(x)=|x-1|+2|x-3|$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

12

일차함수 $y=ax+6-3a$의 그래프는 상수 a의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$를 지난다. 이때 점 P를 지나고 직선 $y=\frac{1}{3}x+7$에 수직인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

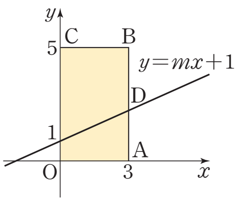
13

오른쪽 그림과 같이 점 B는 선분 AO의 중점이고, 사각형 PBOC의 넓이는 색칠한 두 삼각형 PAB, PCD의 넓이의 합과 같다. 직선 BD의 기울기가 3일 때, 직선 AC의 기울기를 구하여라.



14

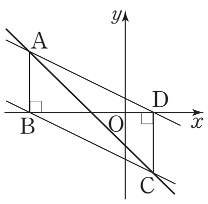
오른쪽 그림과 같이 함수 $y=mx+1$의 그래프가 직사각형 OABC를 두 부분으로 나눈다. 윗부분의 넓이가 아랫부분의 넓이의 2배일 때, 상수 m의 값을 구하여라.



15

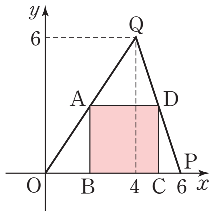
오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=4$이고, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이다. 직선 AD를 그래프로 하는 일차함수의 식이 $y=-\frac{1}{2}x+1$일 때, 직선 AC를 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

(단, 두 점 B, D는 x축 위의 점이다.)



16

오른쪽 그림에서 사각형 ABCD가 △OPQ에 내접하는 정사각형일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.

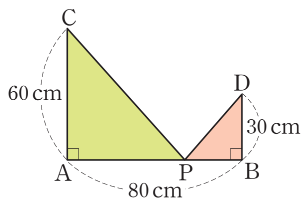


17

5시 40분부터 x분 후 시계의 시침과 분침이 이루는 각 중 크기가 작은 쪽의 각의 크기를 $y°$라 하자. 시침과 분침이 이루는 각의 크기가 136°가 되는 것은 5시 40분부터 몇 분 후인지 구하여라. (단, $0 \le x \le 20$)

18

오른쪽 그림과 같이 선분 AB 위의 점 P는 점 A에서 출발하여 1초에 5 cm씩 점 B까지 움직인다. 점 P가 움직인 시간을 x초, △CAP와 △DPB의 넓이의 합을 $y\,\text{cm}^2$라 할 때, 두 삼각형의 넓이의 합이 $1575\,\text{cm}^2$가 되는 것은 점 P가 출발한 지 몇 초 후인지 구하여라. (단, $0<x<16$)



정답과 해설 p.61

01 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다. 이때 일차함수 $f(x)$를 구하여라.

조건
(가) $f(x^2)=f(x)g(x)-5$
(나) $f(8)=-2$
(다) $g(1)=6$

Tip
$f(x^2)=f(x)g(x)-5$의 x에 적당한 값을 대입한다.

02 일차함수 $f(x)=ax+b$가 $f(x+1)-f(x-1)=-8$, $f(-1)=-1$을 만족할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

Tip
$f(-1)=-1$이므로 $f(x+1)-f(x-1)=-8$에서 $f(-1)$이 나타나도록 x에 적당한 값을 대입한다.

03 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 21)$, $\mathrm{B}(49,\ 325)$가 있다. 선분 AB 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하여라.

Tip
x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 $\mathrm{C}(m,\ n)$이라 할 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

04 일차함수 $y=ax+b(b>0)$의 그래프 위의 임의의 점 P와 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{OAP}$의 넓이가 항상 8일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

Tip
공통인 밑변에 대하여 삼각형의 넓이가 일정하려면 높이가 일정해야 한다.

Tip

05 $|y|=-2|x|+4$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(i) $x\ge0$, $y\ge0$
(ii) $x\ge0$, $y<0$
(iii) $x<0$, $y\ge0$
(iv) $x<0$, $y<0$
으로 나누어 그래프를 그린다.

06 일차함수 $y=2x$의 그래프 위의 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 C, $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\overline{AC}=\overline{BD}$가 성립한다. 이때 직선 AB와 평행하고 x절편이 1인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

$y=2x$의 그래프 위의 점을 $A(a, 2a)$라 할 때, 점 B의 좌표를 구한다.

07 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내자. 예를 들어 $[1.2]=1$, $[-1.5]=-2$, $[3]=3$이다. x의 값의 범위가 $1\le x\le3$일 때, 함수 $y=x[x]$의 y의 값 중 정수의 개수를 구하여라.

정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이다.

08 진욱이는 기름 1 L로 10 km를 달릴 수 있는 자동차를 타고 A도시에서 B도시로 가기로 하였다. 출발할 때 자동차의 기름 계기판의 눈금은 기름이 가득 찼을 때의 $\frac{1}{6}$이었고, 출발과 동시에 주유소에 들러 36 L의 기름을 넣었더니 눈금은 기름이 가득 찼을 때의 $\frac{5}{6}$가 되었다. 추가로 기름을 넣지 않고 B도시에 도착했을 때 계기판의 눈금은 기름이 가득 찼을 때의 $\frac{1}{9}$이 되었다. A도시와 B도시 사이의 거리를 구하여라.

계기판의 눈금의 변화량을 x, 소모한 기름의 양을 y L라 하고, x, y 사이의 관계식을 세운다.

2 일차함수와 일차방정식

1 일차방정식과 일차함수의 그래프

1. 일차방정식과 일차함수의 그래프

x, y의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식

$$ax+by+c=0 \ (a,\ b,\ c\text{는 상수, } a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

의 해를 나타내는 그래프는 직선이다. 이때 이 직선을 일차방정식의 그래프라 하고, 일차방정식 $ax+by+c=0$을 직선의 방정식이라고 한다.

특히 $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 이 직선은 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같다.

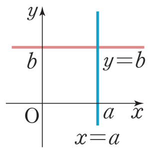
- $ax+by+c=0$
  $\Rightarrow by=-ax-c$
  $\Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

2. 좌표축에 평행한 직선

(1) 방정식 $x=k$의 그래프 : 점 $(k,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선

(2) 방정식 $y=k$의 그래프 : 점 $(0,\ k)$를 지나고 x축에 평행한 직선

참고 직선 $x=k$는 함수의 그래프가 아니다.
직선 $y=k$는 함수의 그래프이지만 이 함수는 일차함수가 아니다.

- 

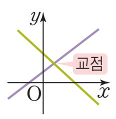
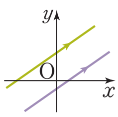
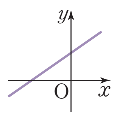
- 방정식 $x=0$의 그래프는 y축이고, 방정식 $y=0$의 그래프는 x축이다.

2 연립방정식의 해와 그래프

1. 연립방정식의 해와 그래프의 위치 관계

(1) 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$의 해는 두 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, $y=-\frac{a'}{b'}x+\frac{c'}{b'}$의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

(단, $a\neq0$, $a'\neq0$, $b\neq0$, $b'\neq0$)

연립방정식의 해	한 쌍의 해를 갖는다.	해가 없다.	해가 무수히 많다.
두 일차 방정식의 그래프			
그래프의 위치 관계	한 점에서 만난다.	평행하다.	일치한다.
기울기와 y절편	기울기가 다르다.	기울기는 같고, y절편은 다르다.	기울기와 y절편이 각각 같다.
	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

- 연립방정식의 해가 $x=p$, $y=q$
  $\Rightarrow$ 두 일차방정식의 그래프의 교점의 좌표가 $(p,\ q)$

Up grade

(2) 두 직선이 수직인 경우는 연립방정식의 해가 한 쌍일 때의 특수한 경우이다.

① 두 일차방정식 $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$의 그래프가 서로 수직이면 $aa'+bb'=0$이다.

② 선분의 수직이등분선의 방정식은 두 직선이 수직임을 이용하여 기울기를 구하고, 이 직선이 선분의 중점을 지남을 이용하여 구한다.

- 두 직선이 수직이면 기울기의 곱이 -1이므로 $\left(-\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$
  $\Rightarrow aa'+bb'=0$

STEP 1 유형별 문제 공략하기

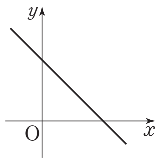
● 정답과 해설 p.62

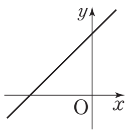
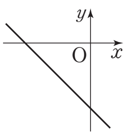
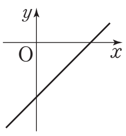
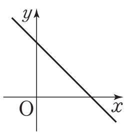
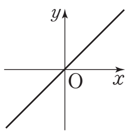
1 일차방정식과 일차함수의 그래프

일차방정식		직선		일차함수
$ax+by+c=0$ $(a\neq0,\ b\neq0)$	$\xrightarrow{\text{그래프}}$ / $\xleftarrow{\text{직선의 방정식}}$	직선	$\xleftarrow{\text{그래프}}$ / $\xrightarrow{\text{함수의 식}}$	$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

1-1 ●○○

일차방정식 $ax-by+c=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 직선 $-bx+cy+a=0$은?



① 
② 
③ 
④ 
⑤ 

1-2 ●○○

y절편이 a이고, 점 $(b,\ 2a)$를 지나는 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$이다. 다음 중 $p+q$의 값을 a, b에 관한 식으로 나타내면? (단, $ab\neq0$이고 p, q는 상수)

① $a+b$　② $a-b$　③ $-a+b$
④ ab　⑤ $\dfrac{b}{a}$

1-3 ●●○

일차방정식 $(2a+1)x+y-4a+2=0$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

2 좌표축에 평행한 직선

1. x축에 평행한 직선
   (1) $y=k$ (k는 상수)의 꼴　(2) y축에 수직
2. y축에 평행한 직선
   (1) $x=k$ (k는 상수)의 꼴　(2) x축에 수직

2-1 ●○○

두 점 $(a+1,\ 2)$, $(2a-2,\ 3)$을 지나고, x축에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

2-2 ●○○

다음 방정식 중 그 그래프가 y축에 평행한 것은?

① $x+y+1=0$　② $y=\dfrac{1}{x}$　③ $2x-3=0$
④ $y+4=0$　⑤ $y=-x$

2-3 ●○○

다음 네 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

$$2x-8=0,\ y=-2,\ x+1=0,\ y-3=0$$

2-4 ●●○

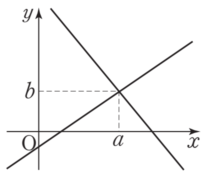
직선 $2ax-(b-3)y+4=0$이 점 $(-3,\ 5)$를 지나고 직선 $x=-4$와 평행할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

3 연립방정식의 해와 그래프

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해는 두 직선 $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$의 교점의 좌표와 같다.

3-1

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=8b \\ x-2y=2 \end{cases}$ 를 풀기 위하여 두 일차방정식의 그래프를 그렸더니 오른쪽 그림과 같았다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.



3-2

두 직선 $2x+y-6=0$, $x-y+3=0$의 교점을 지나고 일차함수 $y=\frac{2}{3}x-2$의 그래프와 평행한 직선이 점 $(k,\ 2k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

3-3

두 직선 $x-y-2=0$, $kx+y-1=0$의 교점이 제1사분면 위에 있을 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k<-1$　② $-1<k<\frac{1}{2}$

③ $k<\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}<k<1$

⑤ $k>1$

3-4

두 점 $(2,\ 10)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선 위에 두 직선 $x-y+1=0$, $ax-y+2=0$의 교점이 있다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

4 연립방정식의 해와 두 직선의 위치 관계

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해의 개수는 두 일차방정식의 그래프의 교점의 개수와 같다.

1. 한 쌍의 해 $\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. $\Longleftrightarrow$ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

   참고 수직이다. $\Longleftrightarrow$ $aa'+bb'=0$

2. 해가 없다. $\Longleftrightarrow$ 평행하다. $\Longleftrightarrow$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
3. 해가 무수히 많다. $\Longleftrightarrow$ 일치한다.

   $\Longleftrightarrow$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

4-1

두 직선 $ax-y=5a$, $3x+2y=4b$의 교점이 2개 이상일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

4-2

연립방정식 $\begin{cases} ay=2x+6 \\ 2y-3x=b \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 두 직선 $y=ax+b$, $bx-ky=9$가 서로 평행하다고 한다. 이때 상수 k의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

4-3

연립방정식 $\begin{cases} mx-3y=2x \\ x-2y+3=mx+3 \end{cases}$ 이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 일차함수 $y=mx+1-2m$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하여라. (단, m은 상수)

5 직선의 방정식의 응용

(1) 도형의 넓이 구하기
두 개 이상의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때는 직선들의 교점의 좌표를 먼저 구한다.

(2) 넓이를 이등분하는 직선 구하기
주어진 도형의 넓이를 이등분하기 위해 직선이 지나야 하는 점을 찾는다.

참고 ① 삼각형의 한 꼭짓점을 지나고 넓이를 이등분하는 직선은 대변의 중점을 지난다.
② 평행사변형 또는 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점을 지난다.

5-1 ●○○

두 직선 $3x+5y=20$, $4x-5y=15$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

5-2 ●●○

두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 10)$을 지나는 직선을 l, 점 $(-2,\ -1)$을 지나면서 x축에 평행한 직선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

5-3 ●●○

직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=ax$가 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

5-4 ●●○

네 직선 $kx-y-1=0$, $2x=3$, $y=4$, $y-1=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 18일 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $k<0$)

5-5 ●●○

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$과 제1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 AOBC가 평행사변형일 때, 사각형 AOBC의 넓이를 이등분하고 y축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

5-6 ●●○

두 직선 $x-3y=1$, $2x+y=16$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 두 직선의 교점을 지나는 직선 l이 이등분한다. 이때 직선 l의 방정식을 구하여라.

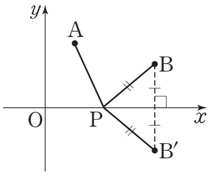
5-7 ●●○

원점 O를 지나는 직선이 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분한다. 이 직선의 방정식을 $ax-by=0$이라 할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

6 좌표평면 위의 최단거리

같은 사분면 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 되게 하는 x축 위의 점 P의 좌표 구하기

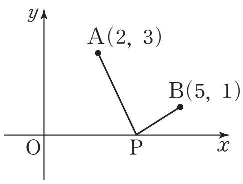


① 점 B와 x축에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\ge\overline{\mathrm{AB'}}$
즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.
② 두 점 A, B′을 지나는 직선 AB′의 방정식을 구한다.
③ 직선 AB′이 x축과 만나는 점 P의 좌표를 구한다.

참고 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$와
x축에 대하여 대칭인 점 ⇨ $(a,\ -b)$
y축에 대하여 대칭인 점 ⇨ $(-a,\ b)$
원점에 대하여 대칭인 점 ⇨ $(-a,\ -b)$

6-1

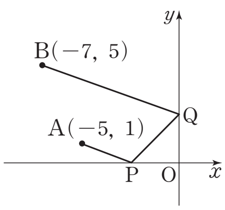
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(5,\ 1)$과 x축 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{17}{3},\ 0\right)$ ② $\left(\frac{17}{4},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{17}{5},\ 0\right)$
④ $\left(\frac{21}{4},\ 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{21}{5},\ 0\right)$

6-2

오른쪽 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(-7,\ 5)$와 x축 위의 점 P, y축 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구하여라.



7 세 직선의 위치 관계

(1) 세 직선이 한 점에서 만날 때, 두 직선의 교점은 다른 한 직선 위의 점이다.
(2) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때, 평행한 두 직선의 기울기는 같다.
(3) 세 직선이 모두 평행할 때, 세 직선의 기울기는 모두 같다.

참고 (1), (2)의 경우 세 직선은 좌표평면을 여섯 부분으로 나누고, (3)의 경우 세 직선은 좌표평면을 네 부분으로 나눈다.

7-1

세 직선 $2x-y=3$, $3x+y=7$, $ax+(4-a)y=5$가 한 점에서 만날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

7-2

서로 다른 세 직선 $3x-2y+4=0$, $ax+2y-1=0$, $x+by-5=0$이 모두 평행할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

7-3

세 직선 $y=x$, $y=-x+1$, $y=ax-1$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하여라.
(단, a는 상수)

● 정답과 해설 p.65

01

직선 $ax+by+c=0$에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. 일차함수의 그래프이다.
ㄴ. $ab<0$, $ac>0$이면 제4사분면을 지나지 않는다.
ㄷ. $b=0$이면 기울기는 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

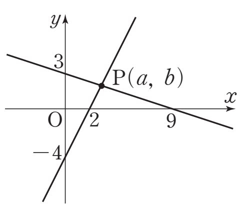
02

다음 세 직선으로 만들어지는 삼각형의 두 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 6)$, $(2,\ 6)$이다. 이때 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

$$2y=x+a,\ y=bx+4,\ cy=dx+1$$

03

오른쪽 그림과 같은 두 직선이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 만날 때, $a+b$의 값을 구하여라.



04

두 직선 $ax-y+b=0$과 $bx-y+a=0$의 교점이 제4사분면 위의 점일 때, 점 $(a,\ b)$는 제 몇 사분면 위의 점인지 구하여라. (단, a, b는 상수, $ab>0$, $a\neq b$)

05

네 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(-1,\ 2)$, $\mathrm{C}(-2,\ -2)$, $\mathrm{D}(3,\ -2)$에 대하여 직선 $y=ax$가 두 선분 AB, CD와 만나지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $-2<a<-\frac{2}{3}$
③ $-\frac{2}{3}<a<1$ ④ $1<a<2$
⑤ $a>2$

06

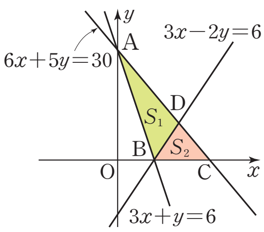
두 직선 $13x+11y=248$과 $mx-y+1=0$이 만나는 점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수일 때, 자연수 m의 값을 구하여라.

07

x의 값의 범위가 $|x| \leq 2$일 때, 함수 $f(x)=|x-1|+x$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

08

오른쪽 그림은 세 직선 $3x+y=6$, $6x+5y=30$, $3x-2y=6$을 좌표평면 위에 그린 것이다. $\triangle ABD$와 $\triangle DBC$의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2$는?



① $1:1$　② $2:1$　③ $3:1$
④ $3:2$　⑤ $4:3$

09

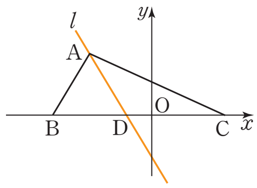
직선 l과 직선 $4x+3y=12$는 서로 평행하다. 이 두 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{32}{3}$일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라. (단, 직선 l의 x절편은 양수이다.)

10

세 직선 $3x+2y-7=0$, $2x-6y-5=0$, $4x-y+3=0$으로 만들어지는 삼각형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 세 직선 $6x+4y-11=0$, $x-3y-13=0$, $4x-y+c=0$으로 만들어지는 삼각형과 겹쳐진다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, c는 상수)

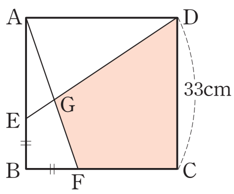
11

오른쪽 그림에서 $A(-5,\ 4)$, $B(-8,\ 0)$, $C(6,\ 0)$이고 $\triangle ABD$의 넓이와 $\triangle ADC$의 넓이의 비가 $3:4$일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라.



12

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 33 cm인 정사각형 ABCD가 있다. $\overline{BE}=\overline{BF}=11$ cm일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



13

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$, $y=-2$와 x축, y축으로 둘러싸인 사각형의 넓이를 이등분하는 직선 l은 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$과 평행하다. 다음 중 직선 l 위에 있지 않은 점은?

① $(2,\ 0)$ ② $(4,\ -1)$ ③ $(6,\ -2)$
④ $(0,\ 1)$ ⑤ $(-2,\ 1)$

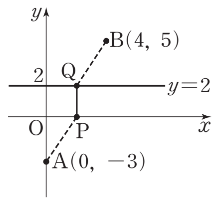
14

함수 $y=2|x-1|+2$의 그래프와 직선 $kx-y+1=0$이 만나지 않도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

15

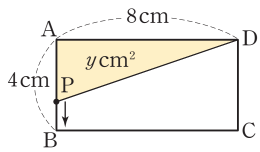
세 점 A$(1,\ 6)$, B$(4,\ -3)$, C$(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. y축에 평행한 직선이 △ABC와 두 점 P, Q에서 만난다고 할 때, $\overline{\text{PQ}}$의 최댓값을 구하여라.

16



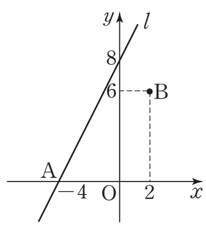
오른쪽 그림과 같이 x축 위의 한 점 P에서 x축과 수직인 직선을 그어 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자. 점 A$(0,\ -3)$에서 두 점 P, Q를 거쳐 점 B$(4,\ 5)$에 이르는 거리가 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하여라.

17



오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 8 cm, 4 cm인 직사각형 ABCD가 있다. 점 P는 점 A에서 출발하여 직사각형의 변을 따라 두 점 B, C를 지나 점 D까지 이동한다. 점 P가 움직인 거리를 x cm, △APD의 넓이를 $y\text{ cm}^2$라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

18



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 l이 있다. 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(2,\ 6)$에 대하여 $\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}$가 되도록 하는 직선 l 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

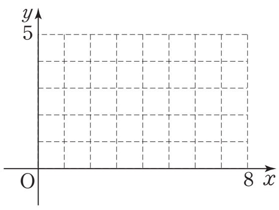
정답과 해설 p.68

Tip

01 모든 수 x에 대하여 세 수 $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$, $-\frac{3}{4}x+7$ 중에서 가장 작은 값을 $f(x)$라 하자. 이때 $f(x)$의 최댓값을 구하여라.

$y=2x+2$, $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=-\frac{3}{4}x+7$로 놓고 그래프를 그려 본다.

02 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 가로, 세로의 길이가 각각 8, 5인 직사각형이 한 변의 길이가 1인 정사각형으로 분할되어 있을 때, 일차함수 $y=-\frac{5}{8}x+5$의 그래프와 만나지 않는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 구하여라.



그래프와 만나는 정사각형의 개수를 먼저 구한다.

03 좌표평면 위의 네 점 $A(2, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, -2)$에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

좌표평면 위에 네 점을 나타내어 본다. 이때 $\overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC}$, $\overline{PB}+\overline{PD}\geq\overline{BD}$이다.

04 세 직선 $x+2y=4$, $y=ax+6$, $x=0$으로 둘러싸인 삼각형의 내부에 있는 점들 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 것은 2개뿐이다. 이때 상수 a의 값의 범위를 구하여라.
(단, $a\neq0$이고 삼각형의 경계선은 포함하지 않는다.)

$a>0$인 경우와 $a<0$인 경우로 나누어 생각한다.

Tip

05

세 직선 $x+2y=-4$, $3x-5y=21$, $(a-2)x+(1-3a)y=10$에 의해 좌표평면이 6개의 부분으로 나누어진다. 이때 상수 a의 값을 모두 구하여라.

어느 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

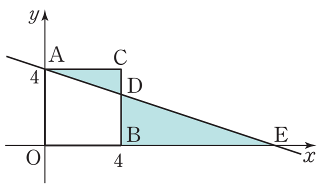
06

좌표축이 그려진 모눈종이를 직선 l을 접는 선으로 하여 접었더니 두 점 $(0,\ 2)$와 $(4,\ 0)$이 일치했다. 이때 점 $(8,\ 3)$과 일치하는 점의 좌표를 구하여라.

접는 선은 겹쳐진 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이다.

07

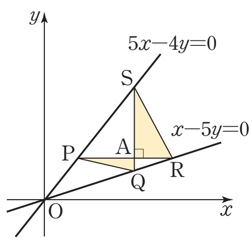
좌표평면 위에 오른쪽 그림과 같이 정사각형 AOBC가 있다. 이때 점 A를 지나는 직선이 변 BC, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 색칠한 부분의 넓이가 사다리꼴 AOBD의 넓이와 같을 때, 점 D의 좌표를 구하여라.



점 D에서 y축에 수선의 발을 내린다.

08

두 직선 $5x-4y=0$, $x-5y=0$ 사이에 있는 제1사분면 위의 점 A에서 x축, y축에 평행한 직선을 그어 두 직선과 만나는 점을 오른쪽 그림과 같이 P, Q, R, S라 할 때, △APQ와 △ARS의 넓이의 비를 구하여라.



점 A의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓고 서로 수직인 직선 SQ와 직선 PR의 방정식을 구한다.

퍼펙트 단원 마무리

● 정답과 해설 p.70

01

일차함수 $y=-2x+b$의 그래프는 점 $(b,\ 4)$를 지난다. 이 일차함수의 그래프에서 x좌표와 y좌표가 같은 점 P의 좌표는?

① $\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$　　② $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　　④ $(1,\ 1)$

⑤ $\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

02 |자사고 기출 유사|

일차함수 $f(x)=3x+1$에 대하여 연산 $*$를 $f(x)*f(y)=f(xy-x-y)$라 할 때, $1*2$의 값을 구하여라.

03

좌표평면 위의 한 점 P를 점 P′으로 옮기는데 $\mathrm{P}(x,\ y) \longrightarrow \mathrm{P}'(x-y,\ ax+y)$인 규칙으로 옮긴다. 이 규칙에 따라 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$을 옮기면 옮긴 점들이 한 직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

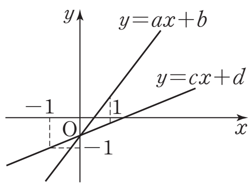
04 |과고 기출 유사|

일차함수 $f(x)=ax+b$가 $2\le f(2)\le 4$, $7\le f(3)\le 11$을 만족한다. $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 최대일 때, x절편과 y절편을 각각 구하여라. (단, a, b는 상수)

05

오른쪽 그림은 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프이다. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

(단, a, b, c, d는 상수)



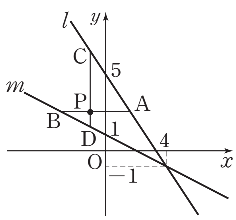
보기

ㄱ. $a>c$　　ㄴ. $a-b+c-d>0$

ㄷ. $(a+b)(c+d)>0$　　ㄹ. $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$

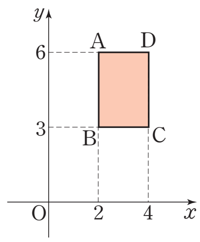
06

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l과 m 사이의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P에서 x축, y축에 각각 평행한 직선을 그어 두 직선 l, m과 만나는 점을 A, B, C, D라 할 때, $\frac{\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{PD}}}$의 값을 구하여라.



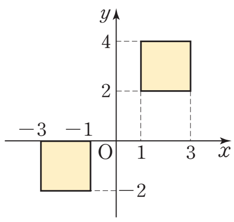
07

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A$(2,\ 6)$, B$(2,\ 3)$, C$(4,\ 3)$, D$(4,\ 6)$이 있다. 일차함수 $y=ax+1$의 그래프가 직사각형 ABCD와 만날 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.



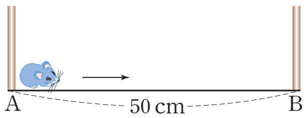
08

오른쪽 그림과 같은 두 개의 정사각형이 있다. 이 두 정사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선을 그래프로 하는 함수의 식을 구하여라.



09 |과고 기출 유사|

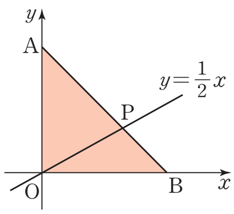
다음 그림과 같이 거리가 50 cm인 두 지점 A, B 사이에 1초에 10 cm씩 움직이는 실험용 쥐를 내려놓았다.



A지점을 출발한 실험용 쥐가 두 지점 A, B 사이를 왕복하는 데 걸리는 시간은 10초이다. x초 후의 실험용 쥐와 B지점 사이의 거리를 $f(x)$라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려라. (단, $0\le x\le 10$)

10

오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프가 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자. $\overline{OA}=\overline{OB}$이고, △AOB의 넓이가 18일 때, 점 P의 좌표는?



① $(2,\ 1)$ ② $(4,\ 2)$ ③ $(6,\ 3)$
④ $(8,\ 4)$ ⑤ $(10,\ 5)$

11

두 직선 $x-2y+2=0$, $x+y-k=0$과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 3일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(단, $k>1$)

12

좌표평면 위의 두 점 A$(1,\ 1)$, B$(3,\ 2)$와 x축 위의 점 P를 꼭짓점으로 하는 △ABP의 둘레의 길이가 최소가 되게 하려고 할 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

13

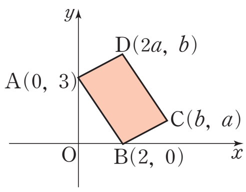
직선 $y=ax-1$이 $f(x)=|x+1|+|x+2|$의 그래프와 만나지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

14

두 직선 $x-3y+12=0$, $7x-3y-6=0$의 교점 A를 지나고, 두 직선과 y축이 이루는 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+3=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

15 |과고 기출 유사|

오른쪽 그림과 같이 네 점 A$(0,\ 3)$, B$(2,\ 0)$, C$(b,\ a)$, D$(2a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD가 있다. 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선이 평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 이 직선의 방정식을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)



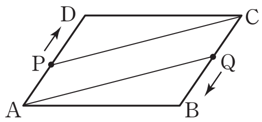
16

다음 두 방정식의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

$$\frac{x+y+|x-y|}{2}=1,\quad \frac{x+y-|x-y|}{2}=-1$$

17

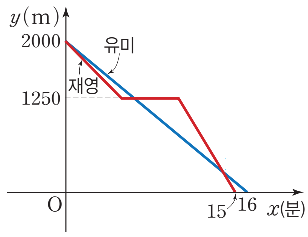
오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 점 P는 점 A를 출발하여 점 D를 향해 매초 3 cm의 속력으로 움직인다. 또 점 Q는 점 P가 점 A를 출발한 지 8초 후에 점 C를 출발하여 점 B를 향해 매초 5 cm의 속력으로 움직인다. $\overline{AD}=100$ cm일 때, $\overline{PC}/\!/\overline{AQ}$가 되는 것은 점 Q가 점 C를 출발한 지 몇 초 후인지 구하여라.



18

재영이와 유미는 2000 m 달리기 시합을 하였다. 재영이는 유미보다 빠른 속도로 일정하게 달리다가 중간에 5분 동안 휴식을 취하였고, 일정한 속력으로 달린 유미는 재영이가 휴식을 취하기 시작한 지 1분 후에 재영이를 지나쳐 갔다. 휴식을 마친 재영이는 다시 달리기 시작하여 유미보다 1분 먼저 결승점에 도착하였다.

오른쪽 그림은 두 사람이 달리기 시작한 지 x분 후 결승점까지 남은 거리를 y m라 할 때, x, y 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 재영이는 휴식을 마친 후 결승점 몇 m 앞에서 유미를 지나쳤는지 구하여라.



특목 경시 대비 논술·구술 도전하기

1 다음 글을 읽고 물음에 답하여라.

도로변에 인접해 있는 아파트의 소음은 층별로 다르다고 한다. 국립환경과학원은 도로에서 떨어진 거리와 소음이 가장 심한 아파트 층 사이의 관계식을 발표하였다.

도로에서 아파트가 x m 떨어져 있다고 할 때, 소음이 가장 심한 y층 사이의 관계는

$y=0.2467x+4.159$

이다.

(1) 도로에서 40 m 떨어져 있는 아파트에서 가장 소음이 심할 것으로 예상되는 층을 말하여라.

(2) 주어진 글의 수식을 통해 추측할 수 있는 사실을 설명하여라.

답안 작성

출제 의도 주어진 일차함수의 식을 이용하여 함숫값을 구하고 그 의미를 해석할 수 있는가를 묻는 문제이다. 일차함수의 식을 해석하는 과정을 통해 아파트에서 도로와의 거리와 가장 소음이 심한 층 사이의 관계에 대한 자신의 의견을 기술할 수 있도록 한다.

● 정답과 해설 p.72

2 **다음은 개의 나이와 사람의 나이 사이의 관계를 설명한 어느 신문 기사의 일부이다. 이 기사를 읽고 물음에 답하여라.**

개의 나이를 사람의 나이와 비교하는 간단한 방법이 있다. 1년 이상이 된 개의 경우는

라는 공식을 적용하면 비교적 정확하게 산출할 수 있다.

1년 된 강아지는 육체적으로나 정신적으로 거의 성년이 된다고 한다. 사람의 나이로 치면 18세가 되는 것이다. 이후 왕성한 활동을 하다가 7～8세가 되면 체력이 저하되고 이를 사람의 나이로 보면 48～53세 정도이다. 10세가 되면 노령기에 접어들기 시작하여 사람을 위해 봉사하던 맹인 안내견이나 재활 보조견, 사역견들은 일을 접어 두고 은퇴를 하게 되는데, 이는 사람의 나이로도 은퇴기와 비슷한 63세 가량이다.

일차함수를 이용하여 위 신문 기사의 빈칸을 알맞은 식으로 채우고, 사람의 평균 수명이 73세라고 할 때, 개의 평균 수명은 몇 세 정도라고 할 수 있는지 논리적으로 설명하여라.

답안 작성

출제 의도

주어진 신문 기사에서 두 변수를 지정하여 일차함수의 식을 글로 표현하고 그 식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다. 두 변수의 관계를 나타내는 문장 또는 조건을 서술 과정에서 보이고, 신문 기사에 맞는 적절한 표현으로 식을 나타낼 수 있도록 한다.

나만의 수학 블로그 Blog

흥미롭고 신기한 수학의 세상
수준 높은 수학 이야기로 나만의 수학 블로그를 만들어 보세요~~

• 그래프의 모양이 독특한 가우스 함수

x의 값의 범위가 수 전체일 때, x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낸다. 이때 $y=[x]$와 같은 함수를 '가우스 함수'라고 한다.

그렇다면 가우스 함수의 그래프는 어떠한 모양일까?

예를 들어 $y=[x]$의 그래프를 그려 보자.

$\vdots$

$-2\le x<-1$일 때, $y=[x]=-2$

$-1\le x<0$일 때, $y=[x]=-1$

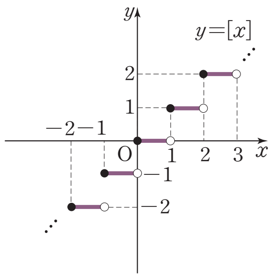
$0\le x<1$일 때, $y=[x]=0$

$1\le x<2$일 때, $y=[x]=1$

$2\le x<3$일 때, $y=[x]=2$

$\vdots$

$y=[x]$의 그래프

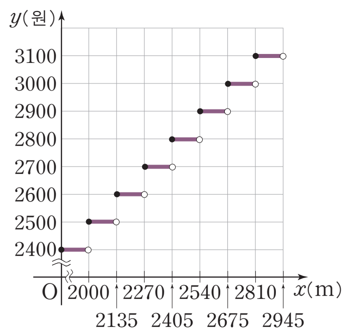


위의 그림과 같이 지금까지 배운 일차함수의 그래프와는 다른 계단 모양의 그래프가 됨을 알 수 있다.

일상 생활에서도 적용될 수 있는 가우스 함수의 예로는 거리에 따라 변하는 택시 요금을 들 수 있다.

택시의 기본 요금을 2400원이라 할 때, 2 km부터는 135 m마다 100원씩 요금이 추가된다고 하자.

이때 택시를 타고 이동한 거리를 x축, 그에 따른 택시 요금을 y축으로 하여 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같은 계단 모양의 그래프가 된다.



일상 생활에서 또 다른 예를 찾아 그래프를 직접 그려 보자.